UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica

di

Anna Cristina Lippa

Applicazioni Conformi in $\mathbb{R}^n$

Relatore

Prof. Edoardo Sernesi

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

Luglio 2006

Classificazione :30Axx, 30A24, 30A30

Parole Chiave: Applicazione conforme, funzione olomorfa.

Sintesi

Oggetto di questa tesi è lo studio di *applicazioni conformi* in $\mathbb{R}^n$ con particolare attenzione per le applicazioni in $\mathbb{R}^2$ prodotte da classi di funzioni analitiche largamente usate nelle applicazioni e in particolare nella risoluzione dei problemi di meccanica e fisica.

Nel primo capitolo viene introdotto il concetto di *trasformazione conforme.* Una tale trasformazione è caratterizzata dalla proprietà di conservazione degli angoli. Fondamentale nella teoria delle trasformazioni conformi è il seguente problema: dati due domini nel piano complesso, definire una funzione che produca un'applicazione biunivoca e conforme da uno di questi domini sull'altro.

Il principale risultato in tale contesto è il teorema dell'applicazione di Riemann, che risolve il problema nel caso di domini semplicemente connessi.

Per lo studio delle applicazioni conformi abbiamo definito i principi generali che le caratterizzano : a) la corrispondenza biunivoca, b) la corrispondenza delle frontiere, c) il principio di simmetria.

Abbiamo presentato in dettaglio una particolare classe di trasformazioni conformi nel piano complesso esteso, le trasformazioni di Möbius del primo ordine, che godono di una importante proprietà:

Teorema 1 (Proprieta' circolare) *Una trasformazione di Möbius trasforma il piano esteso* $\overline{\mathbb{C}}$ *in se stesso, trasforma circonferenze in circonferenze (nella famiglia delle circonferenze sono incluse le rette, considerate circonferenze di raggio infinitamente grande)e conserva gli angoli.*

Le trasformazioni di Möbius hanno sempre due punti fissi (eventualmente coincidenti). Tale proprietà permette un ulteriore classificazione che si ottiene considerando eventuali *circonferenze fisse* , cioè famiglie di circonferenze che vengono mandate in se stesse conservando il verso di percorrenza, che porta alla distinzione tra *trasformazioni ellittiche, paraboliche, iperboliche e lossodromiche.*

Ci si è soffermati in particolare sulla funzione di $Zhukovskii$, sulla *lumaca di Pascal*, e con l'uso dell'integrale di $Schwarz - Cristoffel$ si sono studiate le applicazioni conformi di poligoni.

La funzione è detta di $Zhukovskii$, perchè usata dal matematico russo N.E. Zhukovskii nella risoluzione di problemi di aerodinamica.

Tale funzione $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ trasforma una famiglia di circonferenze $|z| = \rho$ in una famiglia di ellissi e le semirette $arg\ z = \alpha$ in rami d'iperboli.

Naturalmente per risolvere problemi relativi alle condizioni di esistenza ed unicità di applicazioni conformi, nel secondo capitolo, sono stati esposti i teoremi principali che le riguardano, il teorema che lega il concetto di olomorfia, anti-olomorfia e conformità, il teorema dell'applicazione di Riemann.

Il **teorema dell'applicazione di Riemann** *afferma che un aperto* $U \subset \mathbb{C}$

semplicemente connesso, diverso dal piano stesso, è analiticamente isomorfo al disco unitario D.

Come immediata applicazione si deduce che due aperti semplicemente connessi , diversi dal piano, sono conformemente equivalenti.

Nel capitolo terzo si passa a considerare la teoria in dimensione ≥ 3.

Abbiamo presentato il concetto di *inversione* rispetto ad una sfera e ottenuto il seguente teorema:

Teorema 2 1. *L'inverso di un iperpiano passante per il centro d'inversione è l'iperpiano stesso.*

2. *L'inverso di un iperpiano non passante per il centro d'inversione è una sfera passante per il centro d'inversione.*

3. *L'inverso di una sfera passante per il centro d'inversione è un iperpiano non passante per il centro d'inversione.*

4. *L'inverso di una sfera non passante per il centro d'inversione è una sfera non passante per il centro d'inversione.*

Corollario 1 *L'inversione rispetto ad una sfera trasforma rette e circonferenze in rette e circonferenze.*

Nello studio di trasformazioni che preservano le sfere, abbiamo dimostrato il **teorema di Möbius in** $\mathbb{R}^n$:

Sia $f : U \to f(U)$ *un'applicazione biunivoca e continua, definita in un insieme aperto di* $\mathbb{R}^n$, *e supponiamo che* f *applichi (parte di) piani e sfere di*

U in (parte di) piani e sfere di $f(U)$ (non necessariamente rispettivamente). Allora la funzione f è composizione di similitudini e inversioni.

Abbiamo quindi dato una dimostrazione classica del teorema di Liouville, usando nozioni di geometria differenziale su superfici.

Il **teorema di Liouville** (1850) asserisce che *nello spazio Euclideo di dimensione maggior di due, ogni applicazione conforme deve essere una trasformazione elementare, cioè una traslazione, una omotetia, una trasformazione ortogonale, una riflessione rispetto i raggi reciproci, o una combinazione di queste trasformazioni.*

Questo teorema fu provato da **R. Nevanlinna**, con l'ipotesi addizionale che le trasformazioni debbano essere almeno di classe C^4 :

Sia f un'applicazione conforme biunivoca di classe C^4 definita in un'insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con immagine $f(U)$, e supponiamo $n \geq 3$.

Allora la funzione f è composizione di similitudini e inversioni.

Nell'ultimo capitolo ci poniamo la seguente domanda:

Data una curva convessa chiusa liscia nel piano qual'è l'insieme dei punti del piano detti *centri d'inversione* per i quali l'immagine della curva data sarà ancora una curva convessa?

Alla domanda daremo la risposta usando l'ultimo teorema di questa tesi:

Teorema 3 *Sia M una superficie convessa chiusa liscia in $\mathbb{R}^n$.*

Un punto A interno ad M è centro d'inversione che preserva la convessità se e solo se esso giace nell'intersezione degli interni e delle frontiere di tutte le (piccole) sfere principali.

Un punto esterno ad M è un tale centro se e solo se esso giace nell'intersezione degli esterni e delle frontiere di tutte le (grandi) sfere principali.
Se M non è una sfera, l'inversione rispetto al centro di M non preserva la convessità.

Bibliografia

[1] David E. Blair: *Inversion Theory and Conformal Mapping,* 2000.

[2] Lars V. Ahlfors: *Complex Analysis,* McGraw-Hill Publishing Company Third Edition .

[3] Hans Schwerdtfeger: *Geometry of complex numbers,* Dover Publication, New York 1979.

[4] Yu.V.Sidorov, M.V.Fedoryuk e M.I.Shabunin: *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable,* Mir Publishers Moscow 1985.

[5] Edoardo Sernesi: *Geometria 2,* Bollati Boringhieri Torino 1994.

[6] Zeev Nehari: *Conformal Mapping,* McGraw-Hill Publishing Company First Edition 1952.

[7] Aleksej G.Svesnikov , Andrej N.Tichonov: *Teoria delle Funzioni di una variabile complessa,* Editori Riuniti Edizioni Mir Mosca 1984.

[8] Robert Phillips: *Liouville's Theorem,* Pacific Journal of Mathematics, vol 28, No.2, 1969 pp 397-405.