Università degli Studi Roma Tre

FACOLTÀ DI SS.MM.FF.NN.

SINTESI DELLA
TESI DI LAUREA
IN MATEMATICA

PROPRIETÀ GEOMETRICHE E TOPOLOGICHE DELLE SUPERFICI DIFFERENZIABILI

RELATORE
Ch. mo Prof.
Massimiliano Pontecorvo

CANDIDATO
Simone Filaci
Matr. 202449/72

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

Parole chiave: curve differenziabili, superfici regolari, Theorema Egregium di Gauss, teorema di Bonnet, geodetiche, teorema di Gauss-Bonnet, mappe esponenziali, teorema di Hopf-Rinow.

Lo scopo di questo lavoro è quello di studiare le proprietà geometriche e topologiche delle superfici differenziabili. É quindi naturale chiedersi se esiste una "connessione" fra esse: il teorema di Gauss-Bonnet e di Hopf-Rinow risolvono questo quesito.

Introduciamo ora il concetto di *curva differenziabile*.

Sia I un intervallo aperto della retta reale $\mathbb{R}$ e sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione differenziabile. La sua immagine $\mathscr{C} = \alpha(I)$ è detta curva parametrizzata [o traccia di $\mathscr{C}$]; α è detta parametrizzazione di $\mathscr{C}$. Se $\alpha(t) = \big(X_1(t), \dots, X_2(t), X_3(t)\big)$, per ogni $t \in I$, la curva parametrizzata $\mathscr{C} = \alpha(t)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} X_1 = X_1(t) \\ X_2 = X_2(t) \\ X_3 = X_3(t). \end{cases}$$

Il parametro $t \in \mathbb{R}$, è detto parametro della curva.
La parametrizzazione α è detta regolare in $t_0 \in I$ se il vettore $\underline{\alpha}'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ è non nullo. In tal caso il punto $P_0 = \alpha(t_0)$ è detto punto regolare di $\mathscr{C} = \alpha(I)$. α sarà detta parametrizzazione regolare se lo è in ogni $t \in I$.
Se $\mathscr{C}$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^3$, possiamo definire: il versore

$$\mathbf{t}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{\alpha}'(t)}{\|\underline{\alpha}'(t)\|}$$

è detto versore tangente a $\mathscr{C}$ in P [rispetto ad α].
Si chiama vettore di curvatura di $\mathscr{C}$ in $\alpha(t)$ il vettore

$$\underline{k}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\underline{\alpha}'(t)\|}.$$

La sua norma

$$\kappa(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|\underline{k}(t)\| = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\underline{\alpha}'(t)\|}$$

è detta curvatura di $\mathscr{C}$ in $\alpha(t)$.
Un punto $P = \alpha(I)$ è detto punto di flesso di $\mathscr{C}$ se $\kappa(t) = 0$.
Se P è un punto non di flesso, restano definiti i due seguenti versori:

$$\mathbf{n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{k}(t)}{\kappa(t)}, \qquad \mathbf{b}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{n}(t),$$

detti rispettivamente versore normale principale e versore binormale a $\mathscr{C}$ in P.
Infine, si chiama torsione di $\mathscr{C}$, in $P = \alpha(t)$, punto non di flesso, il numero reale $\tau(t)$ tale che

$$\frac{\mathbf{b}'(t)}{\|\underline{\alpha}'(t)\|} = \tau(t)\mathbf{n}(t).$$

La norma del vettore α', $v(t) := \|\underline{\alpha}'(t)\|$, è detta velocità di α nel punto $t \in I$. La velocità è una funzione differenziabile $v : I \to \mathbb{R}$ a valori ovviamente positivi. Se $t_0, t \in I$, la lunghezza di α tra t_0 e t è il numero reale

$$\int_{t_0}^{t} \|\underline{\alpha}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\underline{\alpha}_1'(t)^2 + \cdots + \underline{\alpha}_n'(t)^2} \, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Diremo che α è una parametrizzazione naturale di $\mathscr{C}$ [o parametrizzata dall'ascissa curvilinea] se $\|\underline{\alpha}'(t)\| \equiv 1$, per ogni $t \in I$. Dato un punto $P_0 = \alpha(t_0) \in \mathscr{C}$, la funzione

$$s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t} \|\underline{\alpha}'(t)\| \, \mathrm{d}t, \quad \forall \, t \in I, \tag{2}$$

è detta funzione lunghezza d'arco rispetto a P_0. Tale funzione è continua, strettamente crescente, differenziabile e aperta.

Concludiamo questo argomento con l'enunciato di un importante risultato: il *teorema di rigidità per le curve regolari* [1], noto anche come *teorema fondamentale della teoria locale delle curve regolari*. Esso afferma che è possibile costruire, a meno di movimenti rigidi[2] in $\mathbb{R}^3$, una curva di $\mathbb{R}^3$ avente curvatura e torsione assegnate. Pertanto tali funzioni caratterizzano localmente una curva [a meno della sua posizione in $\mathbb{R}^3$], o meglio: siano $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili definite su uno stesso intervallo aperto I, con $\kappa(s) > 0$, per ogni $s \in I$. Allora esiste una curva regolare parametrizzata $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, tale che s è la funzione lunghezza d'arco, $\kappa(s)$ è la curvatura, e $\tau(s)$ è la torsione di α. Inoltre, un'altra curva β soddisfacente le medesime condizioni, differisce da α per un movimento rigido; allora esiste una mappa ortogonale lineare ρ di $\mathbb{R}^3$, con determinante positivo, e un vettore $\underline{c}$ tale che $\beta = \rho \circ \alpha + \underline{c}$.

Introduciamo ora il concetto di *superficie differenziabile*.
Sia U un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione differenziabile. La sua immagine $\mathscr{S} = \varphi(U)$ è detta superficie parametrizzata; φ è detta parametrizzazione di $\mathscr{S}$. Se $\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, per ogni $(u,v) \in U$, la superficie parametrizzata $\mathscr{S} = \varphi(U)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \forall \, (u,v) \in U.$$

[1]Per una dimostrazione vedere ad esempio [2].

[2]Un *movimento rigito* in $\mathbb{R}^3$ è la composizione fra una traslazione [ossia una mappa linere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $T(x) = x\underline{v}$, con $\underline{v}$ vettore in $\mathbb{R}^3$] e una trasformazione ortogonale [ossia una mappa linere $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $\rho\underline{u} \bullet \rho\underline{v} = \underline{u} \bullet \underline{v}$, per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$.

La parametrizzazione φ è detta regolare in Q se la derivata $\mathrm{d}\varphi_Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ [matrice jacobiana] ha rango massimo. In questo caso il punto $P = \varphi(Q) \in \mathscr{S}$ è detto punto regolare di $\mathscr{S}$.
Una superficie regolare [o superficie differenziabile] $\mathscr{S}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ se, per ogni punto $P \in \mathscr{S}$, esiste un intorno V_P in $\mathbb{R}^3$ e un'applicazione suriettiva $\varphi_P : U \to V_P$, con U aperto di $\mathbb{R}^2$ tali che:

1. φ_P è differenziabile;

2. φ_P è un omeomorfismo[3], rispetto alla topologia indotta su $\mathbb{R}^3$;

3. per ogni punto $Q \in U$, la derivata $\mathrm{d}\varphi_Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ha rango massimo.

V_P è detto intorno coordinato di P in $\mathscr{S}$; φ_P è detta parametrizzazione locale intorno a P; $(u, v) \in U$ sono dette coordinate locali intorno a P; la coppia (V_P, φ_P) [o anche soltanto l'applicazione φ_P] è detta carta locale intorno a P; una famiglia di carte locali, i cui aperti V_P formano un ricoprimento di $\mathscr{S}$, è detta atlante di $\mathscr{S}$.
Consideriamo ora un vettore non nullo $\underline{v}_P \in \mathbb{R}^3 \in \mathbb{R}^3$; $\underline{v}_P \in \mathbb{R}^3$ è detto vettore tangente ad $\mathscr{S}$ nel punto P se esiste una curva $\mathscr{C}$ su $\mathscr{S}$ passante per P e regolare in P, il cui vettore tangente in P coincide con $\underline{v}_P$. L'insieme dei vettori tangenti ad $\mathscr{S}$ in P, incluso il vettore nullo, viene denotato con $\mathbf{T}_P(\mathscr{S})$, e si chiama piano tangente a $\mathscr{S}$ in P.
Una superficie differenziabile $\mathscr{S}$ si dice orientabile se è possibile ricoprirla con una famiglia di carte locali tali che, se un punto $P \in \mathscr{S}$ appartiene a due carte locali, allora il cambiamento di coordinate ha determinante jacobiano positivo. La scelta di una tale famiglia di carte si dice una orientazione di $\mathscr{S}$, ed $\mathscr{S}$, è detta allora orientata. Se una tale scelta non è possibile, $\mathscr{S}$ è detta non orientabile.
Si chiama campo differenziabile di versori normali[4] [per brevità c.d.v.n.] su U, aperto di $\mathscr{S}$, l'applicazione differenziale

$$\boldsymbol{N} : U \to \mathbb{R}^3,$$

tale che, $\boldsymbol{N}(P)$ è un versore normale a $\mathbf{T}_P(\mathscr{S})$, per ogni $P \in U$, ed è definito nel seguente modo:

$$\boldsymbol{N}(P) = \frac{\varphi_u(Q) \wedge \varphi_v(Q)}{\|\varphi_u(Q) \wedge \varphi_v(Q)\|}, \tag{3}$$

per ogni $P \in \mathrm{Im}(\varphi)$ e $P = \varphi(Q)$. Risulta che una superficie differenziabile $\mathscr{S}$ è orientabile $\iff$ esiste un c.d.v.n. $\boldsymbol{N}$ definito sull'intera superficie $\mathscr{S}$. [In tal caso

[3]Ossia, se φ_P è biettiva e φ_P ed φ_P^{-1} sono applicazioni continue.
[4]Indenteremo versore un vettore di norma unitaria.

diremo che $\mathscr{S}$ è orientata da $\boldsymbol{N}$].[5]
Il differenziale di $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}_{*P} : \mathbf{T}_P(\mathscr{S}) \to \mathbf{T}_{\boldsymbol{N}(P)}(\mathbf{S}^2)$. $\boldsymbol{N}_{*P} : \mathbf{T}_P(\mathscr{S}) \to \mathbf{T}_{\boldsymbol{N}(P)}(\mathbf{S}^2)$ è un operatore lineare [vedere definizione 2.3.5 della Tesi], noto come operatore forma [o *operatore di Weingarten*] di $\mathscr{S}$ in P.
Possiamo ora definire la curvatura gaussiana come il seguente rapporto:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{N} - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2},$$

dove

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(u,v) &\stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi_u(u,v)\|^2 \\ \mathfrak{F}(u,v) &\stackrel{\text{def}}{=} \big\langle \varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \big\rangle \\ \mathfrak{G}(u,v) &\stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi_v(u,v)\|^2, \end{aligned} \tag{4}$$

sono noti come coefficienti della prima forma quadratica fondamentale nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $\mathbf{T}_P(\mathscr{S})$[6], e

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(u,v) &\stackrel{\text{def}}{=} -\langle \boldsymbol{N}_u, \varphi_u \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \varphi_{uu} \rangle \\ \mathfrak{M}(u,v) &\stackrel{\text{def}}{=} -\langle \boldsymbol{N}_v, \varphi_u \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \varphi_{uv} \rangle \\ \mathfrak{N}(u,v) &\stackrel{\text{def}}{=} -\langle \boldsymbol{N}_v, \varphi_v \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \varphi_{vv} \rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

sono noti come coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $\mathbf{T}_P(\mathscr{S})$[7]. Tali coefficienti sono funzioni differenziabili in un intorno di P di $\mathbb{R}^2$.
Sia $f : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ un'applicazione differenziabile tra superfici differenziabili. f è detto isometria se, per ogni $P \in \mathscr{S}_1$, il differenziale $f_{*P} : \mathbf{T}_P(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{T}_{f(P)}(\mathscr{S}_2)$ è un'applicazione unitaria, ossia se:

$$\big\langle f_{*P}(\underline{u}_P), f_{*P}(\underline{v}_P) \big\rangle = \langle \underline{u}_P, \underline{v}_P \rangle, \quad \forall\, \underline{u}_P, \underline{v}_P \in \mathbf{T}_P(\mathscr{S}_1).$$

Se $f : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ è un'isometria, $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ si dicono isometriche. Se $f : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ un diffeomorfismo[8] tra superfici differenziabili, f è detto isometria locale se f_{*P} è una trasformazione lineare unitaria di $\mathbf{T}_P(\mathscr{S}_1)$, con $\mathbf{T}_{f(P)}(\mathscr{S}_2)$, per ogni $P \in \mathscr{S}_1$.
Se $f : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ è un'isometria locale, $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ si dicono localmente isometriche.
Gauss riuscì a provare [Theorema Egregium[9]] che la curvatura Gaussiana è invariante per isometrie locali, ossia $\mathfrak{K}(P) = \mathfrak{K}\big(f(P)\big)$, per ogni $P \in \mathscr{S}_1$ e per ogni

[5] Vedere teorema 2.3.1 della Tesi.
[6] Osservazione 2.3.1 della Tesi.
[7] Osservazione 2.3.4 della Tesi.
[8] Definizione 2.1.1 della Tesi.
[9] Vedere teorema 3.1.4 della Tesi.

$f : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$, isometria locale.
Un altro importante risultato è il teorema di compatibilità per le superfici regolari, dovuto a Bonnet, che ha un forte analogia con quello delle curve regolari: siano $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} : V \to \mathbb{R}$ sei funzioni differenziabili, definite su un aperto U di $\mathbb{R}^2$. Definiamo Γ^i_{jk} $[i, j, k = 1, 2]$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{\mathfrak{G}\mathfrak{E}_u - 2\mathfrak{F}\mathfrak{F}_u + \mathfrak{F}\mathfrak{E}_v}{2(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} & \Gamma^2_{11} = \dfrac{2\mathfrak{E}\mathfrak{F}_u - \mathfrak{E}\mathfrak{E}_v - \mathfrak{F}\mathfrak{E}_u}{2(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} \\[2ex] \Gamma^1_{12} = \dfrac{\mathfrak{G}\mathfrak{E}_v - \mathfrak{F}\mathfrak{G}_u}{2(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} & \Gamma^2_{12} = \dfrac{\mathfrak{E}\mathfrak{G}_u - \mathfrak{F}\mathfrak{E}_v}{2(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} \\[2ex] \Gamma^1_{22} = \dfrac{2\mathfrak{G}\mathfrak{F}_v - \mathfrak{G}\mathfrak{G}_u - \mathfrak{F}\mathfrak{G}_v}{2(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} & \Gamma^2_{22} = \dfrac{\mathfrak{E}\mathfrak{G}_v - 2\mathfrak{F}\mathfrak{F}_v + \mathfrak{F}\mathfrak{G}_u}{2(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} \\[2ex] \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}, \end{cases} \tag{6}$$

noti come simboli di Christoffel. Assumiamo che:

1. $\mathfrak{E} > 0, \mathfrak{G} > 0,\ \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 > 0$.

2. Sono soddisfatte le tre equazioni, note come equazioni di compatibilità:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_v - \mathfrak{M}_u = \mathfrak{L}\Gamma^1_{22} + \mathfrak{M}\Gamma^2_{12} - \mathfrak{M}\Gamma^1_{11} - \mathfrak{N}\Gamma^2_{11} \\[2ex] \mathfrak{M}_v - \mathfrak{N}_u = \mathfrak{L}\Gamma^1_{22} + \mathfrak{M}\Gamma^2_{22} - \mathfrak{M}\Gamma^1_{12} - \mathfrak{N}\Gamma^2_{12} \\[2ex] \qquad \mathfrak{E}\mathfrak{K} = (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2. \end{cases} \tag{7}$$

Allora, per ogni $Q \in V$, esiste un intorno $U_Q \subset V$ di Q ed un diffeomorfismo $\varphi_Q : U_Q \to \varphi_Q(U_Q) \subset \mathbb{R}^3$ tale che, la superficie regolare $\varphi_Q(U_Q)$ di $\mathbb{R}^3$, ha per coefficienti della prima e seconda forma quadratica fondamentale, rispettivamente le funzioni $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ e $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$.

Inoltre, se U_Q è connesso e se $\tilde{\varphi}_Q : U_Q \to \tilde{\varphi}_Q(U_Q) \subset \mathbb{R}^3$ è un altro diffeomorfismo, soddisfacente le stesse condizioni di φ_Q, allora esiste una traslazione T e una trasformazione ortogonale ρ di $\mathbb{R}^3$ tale che,

$$\tilde{\varphi}_Q = T \circ \rho \circ \varphi_Q.$$

Ossia, tale parametrizzazione è unica a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$.

Per enunciare il teorema di Gauss-Bonnet occorre prima definire il concetto di *geodetica*.
Una curva regolare connessa $\mathscr{C} = \alpha(I)$, $\alpha : I \to \mathscr{S}$, si dice geodetica se, per ogni $P \in \mathscr{S}$, la parametrizzazione $\alpha(s)$, s funzione lunghezza d'arco, di un intorno aperto coordinato di P, è una geodetica parametrizzata; ossia, $\underline{\alpha}'(s)$ è un campo vettoriale parallelo lungo $\alpha(s)$. Se $\mathscr{S}$ è una superficie differenziabile orientata e $\alpha : I \to \mathscr{S}$ è una parametrizzazione naturale di una curva orientata $\mathscr{C}$ su $\mathscr{S}$, il valore algebrico della derivata covariante

$$[\mathrm{D}\alpha'(s)/\mathrm{d}s] \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_g(s)$$

di $\alpha'(s)$, in $P \in \mathscr{S}$, è detto curvatura geodetica di $\mathscr{C}$ in P[10].
Possiamo finalmente enunciare il teorema di Gauss-Bonnet[11]: sia $\varphi : U \to \mathscr{S}$ una parametrizzazione ortogonale [ossia, con $\mathfrak{F} = 0$] di una superficie orientata $\mathscr{S}$, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che U sia omeomorfo ad un disco aperto e che φ sia compatibile con l'orientazione di $\mathscr{S}$. Sia $\boldsymbol{R} \subset \varphi(U)$ una regione semplice[12] di $\mathscr{S}$, e $\mathscr{C} = \alpha(I)$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea, I intervallo di $\mathbb{R}$, orientata positivamente[13] e tale che, $\partial\boldsymbol{R} = \alpha(I)$. Dati $\alpha(s_0), \ldots, \alpha(s_k)$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_k$, rispettivamente i vertici e gli angoli esterni[14] di α, risulta:

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\mathfrak{K}}\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{\varepsilon}_i = 2\pi, \tag{8}$$

dove κ_g è la curvatura geodetica di $\mathscr{C}$, e $\boldsymbol{\mathfrak{K}}$ è la curvatura gaussiana di $\mathscr{S}$. La curvatura geodetica κ_g e gli angoli esterni $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i = 0, \ldots, k$, usano la stessa orientazione di $\mathscr{S}$.

Il teorema di Gauss-Bonnet "locale" conclude la parte riguardante la geometria delle superfici regolari. Iniziamo ora a vedere alcune proprietà topologiche delle superfici differenziabili.

Una regione semplice $\boldsymbol{R}$ con un numero finito di vertici, ognuno dei quali ha un angolo esterno non nullo, è detta regione poligonale [o semplicemente poligono]. Una regione rettangolare [o rettangolo] è una regione poligonale con esattamente

[10] Vedere definizioni 3.3.8 e 3.3.2 della Tesi.

[11] Teorema 4.2.1 della Tesi.

[12] $\boldsymbol{R} \subset \mathscr{S}$ è detta semplice se è omeomorfa a un disco, e se il bordo $\partial\boldsymbol{R}$ è l'insieme immagine di una curva parametrizzata, semplice, chiusa e regolare a tratti $\alpha : I \to \mathscr{S}$.

[13] $\mathscr{C} = \alpha(I)$ è detta *positivamente orientata* se il determinante $\left|\underline{\alpha}'(t) \quad \mathbf{h}(t) \quad \boldsymbol{N}\right| > 0$, dove $\mathbf{h}(t)$ è vettore normale, unitario che punta verso i punti interni di α.

[14] Definizione 4.1.2.

quattro vertici. Analogamente, una regione triangolare [o triangolo] è una regione poligonale con esattamente tre vertici. Una decomposizione poligonale di $\boldsymbol{R}$, di una superficie regolare $\mathscr{S}$ è una collezione finita $\mathfrak{D}$ di regioni poligonali, chiamate facce, tale che:

1. Ogni $D \in \mathfrak{D}$ è omeomorfo a un disco.
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i = \boldsymbol{R}$, $D_i \in \mathfrak{D}$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.
3. Se $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, allora $D_i \cap D_j$ è un lato comune di entrambi D_i e D_j, oppure, un vertice comune di entrambi D_i e D_j.

Se tutte le facce di $\mathfrak{D}$ sono triangoli, allora $\mathfrak{D} := \mathfrak{T}$ è chiamata triangolazione.
Il teorema che segue, noto come teorema di classificazione, è uno dei più importanti risultati della topologia delle superfici differenziabili. Infatti esso classifica completamente le superfici connesse e compatte di $\mathbb{R}^3$: ogni superficie connessa e compatta $\mathscr{S}$ di $\mathbb{R}^3$ è omeomorfa ad una dei seguenti tipi:

1. sfera $\mathbf{S}^2$,
2. somma connessa di n tori,
3. somma connessa di n piani proiettivi $\mathbb{P}^2$.

La dimostrazione (vedere ad esempio [18]) è costruttiva: non solo prova il risultato, ma fornisce anche un metodo per il quale tutte le superfici connesse e compatte di $\mathbb{R}^3$ possono essere ridotte nella scelta delle tre forme sopra citate.

Il fatto che ogni superficie regolare e compatta di $\mathbb{R}^3$ sia orientabile non è banale. Sia $\mathscr{S}$ una superficie regolare e compatta di $\mathbb{R}^3$ [considerata senza bordo].[15]

Consideriamo ora una regione regolare $\boldsymbol{R}$. Il numero dei poligoni [facce], dei lati e dei vertici di una decomposizione poligonale di $\boldsymbol{R}$, definiscono un numero intero, noto come caratteristica di Eulero-Poincarè: denotiamo con $\mathfrak{f}$ il numero dei triangoli [facce], con $\mathfrak{l}$ il numero dei lati, e con $\mathfrak{v}$ il numero dei vertici di $\mathfrak{T}$. L'intero

$$\boldsymbol{\chi} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{f} - \mathfrak{l} + \mathfrak{v},$$

è detto caratteristica di Eulero-Poincarè della triangolazione $\mathfrak{T}$.
Per convenienza, denoteremo con $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{T})$ la caratteristica di Eulero-Poincarè della regione regolare $\boldsymbol{R}$, con triangolazione $\mathfrak{T}$.

[15] Per la dimostrazione vedere il teorema 4.3.2 della Tesi.

L'importanza di tale intero segue dal fatto che $\boldsymbol{\chi}$ non dipende dalla triangolazione di $\boldsymbol{R}$[16], e quindi possiamo benissimo scrivere che $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{T}) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{R})$.
Dal teorema di classificazione discende questo notevole risultato[17]:Siano $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ due superfici regolari, compatte e connesse. Le seguenti condizioni sono equivalenti fra loro:

1. $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ sono omeomorfe.
2. $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ sono diffeomorfe.
3. $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ sono [entrambi orientabili], o entrambi non orientabili, e hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincarè.

Possiamo finalmente enunciare la "forma globale" del teorema di Gauss-Bonnet che lega appunto la geometria e la topologia di una superficie differenziabile: sia $\boldsymbol{R} \subset \mathscr{S}$ una regione regolare di una superficie differenziabile orientata $\mathscr{S}$. Siano $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ curve semplici, chiuse e regolari a tratti, che formano il bordo $\partial \boldsymbol{R}$ di $\boldsymbol{R}$. Supponiamo che ogni $\mathscr{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, siano positivamente orientate e che $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ siano gli angoli esterni delle curve $\mathscr{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Allora

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathscr{C}_i} \kappa_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_{\boldsymbol{R}} \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\varepsilon}_i = 2\pi\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{R}), \tag{9}$$

dove s denota la lunghezza d'arco di ogni $\mathscr{C}_i$, κ_g è la curvatura geodetica di $\mathscr{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{K}$ è la curvatura gaussiana di $\mathscr{S}$ e $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{R})$ è la caratteristica di Eulero-Poincarè di $\boldsymbol{R}$.
Nel caso particolare in cui $\mathscr{S}$ è compatta, ossia non ha bordo, il teorema si riduce semplicemente nel seguente modo:

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\boldsymbol{\chi}(\mathscr{S}).$$

Tale risultato è di notevole importanza, non solo a livello pratico[18], ma anche perchè $\boldsymbol{\chi}(\mathscr{S})$ non dipende dalla triangolazione di $\mathscr{S}$, o analogamente che $\iint_{\mathscr{S}} \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma$ è un invariante topologico.

Dal teorema di Gauss-Bonnet segue un importante teorema di Jacobi[19]: sia $\mathscr{C}$ una curva regolare chiusa, parametrizzata da $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, con I intervallo

[16] Teorema 4.3.3 della Tesi.
[17] Vedere ad esempio [1].
[18] Infatti è possibile calcolare $\iint_{\mathscr{S}} \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma$ su qualunque superficie conoscendone soltanto la sua caratteristica di Eulero-Poincarè, e non la sua parametrizzazione. Vedere esempio 4.4.2 della Tesi.
[19] Vedere teorema 4.5.2 della Tesi.

della retta reale. Sia $\kappa(P)$ la curvatura di $\mathscr{C}$ tale che $\kappa(P) \neq 0$, per ogni $P \in \mathscr{C}$. Assumiamo che la curva $\mathscr{C}$, descritta dal vettore normale $\mathbf{n}$ [considerato come una curva sulla sfera unitaria $\mathbf{S}^2$], è una curva semplice chiusa. Allora $\mathbf{n}(I)$ divide $\mathbf{S}^2$ in due regioni di area uguale.

É importante inoltre osservare che: se T è un triangolo geodetico [figura 4.0.1 della Tesi] di una superficie orientata $\mathscr{S}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$, $\boldsymbol{\iota}_1, \boldsymbol{\iota}_2, \boldsymbol{\iota}_3$ rispettivamente gli angoli esterni ed interni di T, $[\boldsymbol{\chi}(T) \equiv 1]$:

$$\iint\limits_T \mathcal{K}\, \mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\varepsilon}_i = 2\pi \iff \iint\limits_T \mathcal{K}\, \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\iota}_i - \pi.$$

Pertanto, deduciamo che

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\iota}_i = \pi$, se $\mathcal{K} = 0$.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\iota}_i > \pi$, se $\mathcal{K} < 0$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\iota}_i < \pi$, se $\mathcal{K} > 0$.

Se $\mathcal{K} \neq 0$ su T, la curvatura totale[20] è l'area dell'immagine $\boldsymbol{N}(T)$ di T della mappa di Gauss $\boldsymbol{N} : \mathscr{S} \to \mathbf{S}^2$, dove $\mathscr{S}$ è ovviamente una superficie differenziabile. Questa era la forma che Gauss diede al suo teorema: l'eccesso di un triangolo geodetico T [ossia la quantità $\sum \boldsymbol{\iota}_i - \pi$] è uguale all'area della sua immagine sferica $\boldsymbol{N}(T)$.

Anche il teorema di Hopf-Rinow, come quello di Gauss-Bonnet, mostra la connessione tra le proprietà topologiche e geometriche delle superfici regolari. Esso afferma che: sia $\mathscr{S}$ è una superficie completa[21]. Dati due punti $P, Q \in \mathscr{S}$, allora esiste una geodetica minimale, ossia quella di lunghezza minima, passante per P e Q.

[20] Ossia il numero così definito:

$$\mathbf{K}(\mathscr{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\mathscr{S}} \mathcal{K}\, \mathrm{d}\sigma,$$

dove $\mathcal{K}$ è la curvatura gaussiana di $\mathscr{S}$.

[21] Una superficie $\mathscr{S}$ connessa e differenziabile si dice completa se, per ogni punto $P \in \mathscr{S}$, la mappa esponenziale [definizione 5.0.4 della tesi] $\mathbf{exp}_P : \mathbf{T}_P(\mathscr{S}) \to \mathscr{S}$ è definita per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_P(\mathscr{S})$.

É bene osservare che se $\mathscr{S}$ non è completa, tale geodetica minimale non è detto che esista. Ad esempio, $\mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\}$ non è una superficie completa in quanto, non esiste la geodetica minimale passante per i punti $P, Q \in \mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\}$ se considerati sulla stessa retta passante per l'origine.

Bibliografia

[1] AHLFORS L.V. and L. SARIO, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[2] CAMPANELLA GIULIO, *Curve e Superfici differenziabili: Esercizi svolti*, Aracne, Roma, 2000.

[3] CAMPANELLA GIULIO, *Esercizi di Topologia generale*, Aracne, Roma, 1997.

[4] DO CARMO MANFREDO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

[5] FUSCO NICOLA, MARCELLINI PAOLO, SBORDONE CARLO, *Analisi Matematica 2*, Liguori Editore, Napoli, 1996.

[6] GAUSS, K. F., *General Investigation Of Curved Surfaces*, Raven Press, New York, 1965.

[7] GRAY ALFRED, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 1998.

[8] GULLEMIN V. e POLLACK A., *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.

[9] HSIUNG CHUAN-CHIH, *A first course in Differential Geometry*, International Press, Lehigh University, 1997.

[10] KINSEY L. CHRISTINE, *Topology of Surfaces*, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, 1997.

[11] KUHNEL WOLFGANG, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, American Mathematical Society, 1950.

[12] MASCHIETTI ANTONIO, *Lezioni di Geometria*, Aracne, Roma, 1993.

[13] MASSEY W. S., *Algebraic Topology: An introduction*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[14] MILNOR, JOHN WILLARD, *Topology from Differentiable Viewpoint*, Charlottesville: University Press og Virginia, 1965.

[15] O'NEILL BARRET, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, INC, California.

[16] SAMELSON HANS, *Shorter Note: Orientability of Hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 22, No. 1, 1969, $301 - 302$.

[17] SERNESI EDOARDO, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[18] SERNESI EDOARDO, *Superfici di Riemann*, Dipartimento di Matematica Roma3, Università degli studi 'Roma Tre', Roma (pubbl. interna), A.A. 2000-2001.

Indice analitico