PROVA FINALE DI TIPO B e PROVA D'ACCESSO ALLA LAUREA SPECIALISTICA

1-10-2003

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

a) la sufficenza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi (analisi e geometria) e con un totale di almeno 51;

b) il punteggio massimo è 100;

c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (Punti 15)

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 0} 2^n \sin\frac{x}{3^n}.$$

1.2 (Punti 15)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{\log|x|}.$$

Se ne trovi il dominio, si dimostri che si può estendere per continuità a una funzione definita su tutto $\mathbf{R}$ e se ne studi brevemente il grafico.

1.3 (Punti 15)

Si enunci il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue e se ne dia una breve dimostrazione.

1.4 (Punti 15)

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = a\,(1-\cos x) + \cos 2x,$$

dove a è un parametro. Al variare di a in $\mathbf{R}$ si risponda alle seguenti domande.

(i) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

dove $V'(x) = \mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$, e se ne discuta la stabilità.

(ii) Determinare i valori di energia $E = E(a)$ in corrispondenza dei quali le traiettorie non sono periodiche.

1.5 (Punti 25)

Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrare che se

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = 1$$

allora

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

dove

$$B(0,r) = \{(x,y) \quad : \quad x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

È vero anche il viceversa?

1.6 (Punti 25)

Si consideri l'insieme $M(2 \times 2)$ delle matrici 2×2 a coeficienti reali come uno spazio vettoriale identificato con $\mathbf{R}^4$. In altre parole,

$$M(2 \times 2) = \{A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad : \quad (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4\}.$$

Si dimostri che

$$\Sigma = \{A \in M(2 \times 2) \quad : \quad \mathrm{detA} = 1\}$$

è una ipersuperficie regolare di $\mathbf{R}^4$. Si dimostri che il suo spazio tangente nel punto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è dato dalle matrici a traccia nulla.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (Punti 15)

Siano $v_1 = (0,0,1,1), v_2 = (0,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $< v_1, v_2 > \subset N(F), F(E_4) = E_3, F(E_1) = cE_1$ per qualche numero reale c, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.

2.2 (Punti 15)

In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le tre rette di equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3s \end{cases}, \mathcal{R}_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e tre le rette?

(b) Determinare tutte le terne di punti $P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2, P_3 \in \mathcal{R}_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 sono allineati.

2.3 (Punti 15)

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore ed diagonalizzabilità di F;

(b) Si enunci il risultato che da condizioni necessarie e sufficenti, in termini di dimensioni degli autospazi, per la diagonalizzabilità di F;

(c) si dia una traccia (il più possibile completa) della dimostrazione.

2.4 (Punti 15)

In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, sia W il sottospazio vettoriale di equazione $2X - Y + Z = 0$, e sia $v = (1,1,1)$.

(a) Trovare una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di W tale che $\{e_1, e_2, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ orientata concordemente alla base standard $\{E_1, E_2, E_3\}$;

(b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ applicando il metodo di Gram-Schmidt a $\{e_1, e_2, v\}$;

(c) Determinare se esistono vettori $w \in W$ tali che $||w|| = 3$ e w forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con $u = (1,0,1)$.

2.5 (Punti 25)

Siano $k, h \in \mathbb{R},\ k \neq 0, h \neq 0$ e siano $\mathcal{C}_k \subset \mathbf{E}^2$ la conica di equazione

$$(3-k^2)X^2 + (1-3k^2)Y^2 + 2\sqrt{3}(1+k^2)XY - 2\sqrt{3}X - 2Y + 1 - 4k^2 = 0$$

e $\mathcal{D}_h \subset \mathbf{E}^2$ la conica di equazione

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{h} = 1.$$

(a) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni $k \neq 0$;

(b) Determinare i valori di h e k per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti.

2.6 (Punti 25)

Sia A un anello commutativo unitario e sia a un elemento nilpotente di A (cioè un elemento $a \in A$ tale che $a^k = 0$, per qualche intero $k \geq 1$). Mostrare che:

(a) L'insieme I degli elementi nilpotenti di A è un ideale di A e che l'anello-quoziente A/I è privo di elementi nilpotenti diversi dall'elemento nullo.

(b) Se u è un elemento invertibile di A e se a è un elemento nilpotente di A, allora $u + a$ è invertibile in A (determinare esplicitamente il suo inverso).

(c) Se a_0 è un elemento invertibile di A e se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sono elementi nilpotenti di A, con $m \geq 1$, allora il polinomio $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_mX^m$ è un elemento invertibile in $A[X]$.

(d) Sia $a \in A$, allora:

$$1 + aX \ \text{ è invertibile in } \ A[X] \quad \Leftrightarrow \quad a \ \text{ è nilpotente in } \ A\,.$$