PFB - Tutorato 3

Sessione Gennaio-Febbraio 2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

27 gennaio 2009

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 12/06/08, n. 1.6). ***Dissertazione teorica.*** *Si consideri l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0\}$$

(i) *Si dimostri che i punti* $(0, 1)$, $(0, -1)$ *e* $(0, 0)$ *stanno in* A.

(ii) *Enunciare il teorema della funzione implicita in* $\mathbb{R}^2$.

(iii) *Dimostrare che, in un intorno del punto* $(0, 1)$, A *è il grafico di una funzione* $y(x)$; *calcolare* $y'(0)$. *Stessa domanda per il punto* $(0, -1)$.

(iv) *Determinare se valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto* $(0, 0)$.

(v) *Usando i moltiplicatori di Lagrange, trovare il massimo e minimo della funzione* $f(x, y) = y$ *su* A.

Esercizio 2 (PFB 07/10/05, n. 1.1). *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1}\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 3 (PFB 22/06/05, n. 1.2). *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(1 + x^2)^3}.$$

Potrebbe essere utile applicare la sostituzione $1 = (1 + x^2) - x^2$.

Esercizio 4 (PFB 01/07/03, n. 1.4). *Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano*

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y - 1 \\ \dot{y} &= 4x(4x^2 - 1). \end{cases}$$

(i) *Verificare che la funzione* $H(x, y) = (y - 2x^2)(y - 1 + 2x^2)$ *è una costante del moto.*

(ii) *Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.*

(iii) *Trovare esplicitamente la soluzione con dati iniziali* $(x(0), y(0)) = (1, 2)$.

GEOMETRIA

Esercizio 5 (PFB 12/06/08, n. 2.4). *Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione*

$$2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 4X - 2Y + 2 = 0.$$

Esercizio 6 (PFB 12/06/08, n. 2.5). *Sia* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) *Calcolare* $\mathrm{Ker} f$ *e* $\mathrm{Im} f$ *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) *Posto* $t = 0$, *esiste* $k \in \mathbb{R}$ *tale che* $(k + 3, k, 1, 2k) \in \mathrm{Ker} f$?

(iii) *Determinare una base di* $\mathbb{R}^4$ *contenente una base di* $\mathrm{Ker} f$.

(iv) *Determinare le controimmagini del vettore* $(1, 0, -1)$.

Esercizio 7 (PFB 30/01/08, n. 2.5). *Si consideri l'applicazione* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$\begin{aligned} F(0, 1, 2) &= (8, -2 + 2k, 16) \\ F(2, 0, -1) &= (-1, -2 - 2k, -2) \\ F(1, 3, -1) &= (4, -7 - k, 8). \end{aligned}$$

Per ogni valore di k *si determini una base per il nucleo e l'immagine di* F.

Posto $k = -3$, *verificare che* F *è diagonalizzabile, scrivere una matrice diagonale ad essa associata e una base di* $\mathbb{R}^3$ *rispetto alla quale tale matrice rappresenta* F.

Esercizio 8 (PFB 01/07/03, n. 2.2). *In* $\mathbb{R}^4$ *si costruisca una base ortonormale* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *rispetto al prodotto scalare standard tale che* $\{e_1, e_3\}$ *sia una base del sottospazio* $\mathbf{W}^\perp$, *dove*

$$\mathbf{W} = \langle (1, 2, 1, 0), (0, 2, 1, 0) \rangle.$$