Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laura Special

Dip. Matematica - Università Roma Tre

2 febbraio 2005

**Istruzioni.**
a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti;
b) il punteggio massimo è 100;
c) la scelta dei problemi da svolgre è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti;
d) evitare di consegnare sullo stesso foglio esercizi di gruppi diversi.
**NON PARLARE** pena il ritiro del compito.

**Gruppo 1** (analisi)

**1.1 (15 punti.)**

Calcolare lo sviluppo di Taylor nello 0 all'ordine 5 della funzione

$$f(x) = \arctan x^2 + \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

**1.2 (15 punti.)** Determinare per quali valori di $\alpha$ la seguente funzione è differenziabile nell'origine

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin^2 x}{\log(1+|x|)}\right)^\alpha & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

**1.3 (15 punti.)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, crescente o decrescente. Dimostrare che l'equazione

$$f^2(x) = x^2$$

ha sempre almeno una soluzione. Esistono casi con infinite soluzioni?

**1.4 (15 punti.)** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{4}\alpha x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma,$$

dove $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ sono tre parametri reali.

(i) Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ e al variare dei parametri $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ trovare i punti d'equilibrio

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

dove $V'(x) = \mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$, e se ne discuta la stabilità.

(ii) Discutere qualitativamente il moto del sistema per $\alpha = \gamma = 0$, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

**1.5 (25 punti.)** Disegnare un grafico qualitativo e trovare il punto di minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \int_0^x (t^3 - 2t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

**1.6 (25 punti.)** **Dissertazione teorica.** Definizione e prime proprietà della differenziabilità per funzioni di piú variabili.

**Gruppo 2** (geometria)

**2.1 (15 punti.)** Calcolare
$$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^{150}$$

**2.2 (15 punti.)** Fornire la classificazione Euclidea e la forma canonica della seguente conica

$$X^2 + Y^2 - 4XY - 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - 4 = 0$$

**2.3 (15 punti.)** Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice quadrata; discutere le seguenti affermazioni:

1. $A$ è diagonalizzabile $\Rightarrow A^2$ è diagonalizzabile;
2. $A^2$ è diagonalizzabile $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

**2.4 (15 punti.)** Un anello $A$ si dice *booleano* se ogni elemento di $A$ è idempotente, cioè $a^2 = a$, per ogni $a \in A$.

- Sia $A$ un anello booleano unitario. Mostrare che:
  (1) $2a = 0$, per ogni $a \in A$ (cioè $A$ ha caratteristica 2);
  (2) Se $a \neq 0, 1$, allora $a$ è uno zerodivisore di $A$;
  (3) $ab = aba = ba$, per ogni $a, b \in A$, in particolare $A$ è commutativo;
  (4) $A$ è integro se e soltanto se $A$ è un campo con 2 elementi;
- Sia $X$ un insieme. Mostrare che l'insieme delle funzioni

  $$\mathbb{Z}_2^X := \{f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$$

  dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione puntuale:

  $$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ ; \quad (fg)(x) = f(x)g(x)\ , \text{ per ogni } x \in X$$

  è un anello unitario booleano.

**2.5 (25 punti.)** I punti $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $B = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ giacciono sulla sfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sono situati entrambi sul $60^0$ parallelo - cioè sul cerchio di equazione $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, il cui raggio è $r = \cos\frac{\pi}{3}$.

1. Calcolare la distanza $\mathbf{l}_1$ tra $A$ e $B$ in $\mathbb{R}^3$.
2. Calcolare la lunghezza $\mathbf{l}_2$ dell'arco di $60^0$ parallelo tra $A$ e $B$.
3. Usando il prodotto scalare $A \cdot B$ calcolare la lunghezza $\mathbf{l}_3$ dell'arco di cerchio massimo - cioè centrato nell'origine di $\mathbb{R}^3$ e quindi di raggio 1 - che passa per $A$ e $B$.
4. Ordinare $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ e $\mathbf{l}_3$.

**2.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.** Enunciare e dimostrare il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli.

Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laurea Magistrale

2 febbraio 2005

**Soluzioni degli esercizi del Gruppo 1 (analisi)**

**1.1 (15 punti.)**

Dalla nota uguaglianza $(1+x)(1-x+x^2-x^3+\ldots \pm x^n) = 1 \pm x^{n+1}$ si ottiene lo sviluppo di Taylor nell'origine per la funzione $\frac{1}{1+x}$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

(si ottiene facilmente anche con la formula per il polinomio di Taylor di ordine $n$).
Scrivendo $x^2$ al posto di $x$ in tale sviluppo si ha

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right),$$

ed integrando quest'ultima tra 0 e $x$ ,

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

da cui

$$\arctan x^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{2k+1} + o\left(x^{4n+2}\right).$$

Considerando anche il noto sviluppo

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

si ha

$$f(x) = \arctan x^2 + \sin x \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= x^2 + o(x) + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right)\right) =$$

$$= x + x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + o\left(x^5\right).$$

**1.2 (15 punti.)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile nell'origine se e solo se esiste finito il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
Utilizzando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e la continuità dell'applicazione $x \to x^\alpha$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin^2 x}{\log(1+|x|)}\right)^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{|x|}\right)^\alpha}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{x} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha = 0 \\ \nexists, & \text{se } \alpha \leq 1,\ \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha > 1$.
N.B. Il caso $\alpha = 0$ si poteva trattare a parte, poiché $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$
non è continua nell'origine nè tantomeno differenziabile.

**1.3 (15 punti.)**

L'affermazione è vera se assumiamo l'ipotesi aggiuntiva che $f(x)$ sia continua.
Infatti $f^2(x) = x^2 \iff f(x) = \pm x$.
Supponiamo che $f(x)$ sia crescente (il caso $f(x)$ decrescente si tratta

simmetricamente, oppure considerando la funzione crescente $-f(x)$), allora si avrà

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-\infty$$

e per il teorema dei valori intermedi (o esistenza degli zeri) applicato alla funzione continua $f(x)+x$, esiste $\overline{x}$ tale che $f(\overline{x})+\overline{x}=0$, cioè $f(\overline{x})=-\overline{x}$.

Esistono casi con infinite soluzioni: c'è il caso banale $f(x)=x$ o $f(x)=-x$; oppure basta sommare alla soluzione banale un'opportuna funzione con infiniti zeri; ad esempio sono soluzioni $f(x)=x+\sin x$ e $f(x)=-x+\cos x$.

**1.4 (25 punti.)**

(i) I punti d'equilibrio sono i punti $P=(x,y)$ in cui si annulla il campo vettoriale: $\dot{x}=0$ richiede $y=0$, mentre $\dot{y}=0$ richiede

$$V'(x)=\alpha x^3+2x^2+\beta x=x\left(\alpha x^2+2x+\beta\right)=0.$$

Il valore del parametro $\gamma$ è assolutamente irrilevante, e può essere posto arbitrariamente uguale a $\gamma=0$ (per esempio).

Il punto $P_0=(0,0)$ è sempre un punto d'equilibrio. Se $\alpha=0$ si ha $V'(x)=0$, oltre che per $x=0$, anche per $x=-\beta/2$: se $\beta=0$ quindi l'unico punto d'equilibrio è $P_0$, mentre se $\beta\neq 0$ si ha anche il punto d'equilibrio $P_1=(-\beta/2,0)$. Se $\alpha\neq 0$ si ha $V'(x)=0$, oltre che per $x=0$, per $x=x_\pm$, dove

$$x_\pm=\frac{-1\pm\sqrt{1-\alpha\beta}}{\alpha},$$

purché sia $\alpha\beta\leq 1$, i.e. $\beta\leq 1/\alpha$ se $\alpha>0$, $\beta\geq 1/\alpha$ se $\alpha<0$. Si noti che se $\alpha\beta<1$ si hanno due punti d'equilibrio distinti $P_\pm=(x_\pm,0)$, mentre se $\alpha\beta=1$ si ha $x_-=x_+=-1/\alpha$, e quindi un solo punto d'equlibrio $P_2=(-1/\alpha,0)$. D'altra parte se $\beta=0$ si ha $P_+=P_0$, quindi in tal caso si hanno solo due punti d'equilibrio distinti, $P_0$ e $P_-$.

*In conclusione se $\alpha=0$ e $\beta=0$ si ha il solo punto d'equilibrio $P_0$. Se $\alpha=0$ e $\beta\neq 0$ si hanno due punti d'equilibrio $P_0$ e $P_1$. Se $\alpha>0$ e*

*$\beta < 1/\alpha$, $\beta \neq 0$, oppure se $\alpha < 0$ e $\beta > 1/\alpha$, $\beta \neq 0$, si hanno i tre punti d'equilibrio $P_0$, $P_-$ e $P_+$. Se $\alpha > 0$ e $\beta = 0$, oppure se $\alpha < 0$ e $\beta = 0$, si hanno i due punti d'equilibrio $P_0$ e $P_-$. Se $\alpha > 0$ e $\beta = 1/\alpha$ oppure se $\alpha < 0$ e $\beta = 1/\alpha$ si hanno i due punti d'equilibrio $P_0$ e $P_2$. Se $\alpha > 0$ e $\beta > 1/\alpha$ oppure se $\alpha < 0$ e $\beta < 1/\alpha$ si ha il solo punto d'equilibrio $P_0$.*

Per studiare la stabilità dei punti d'equilibrio si tenga conto che si ha

$$V''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2} = 3\alpha x^2 + 4x + \beta.$$

Si consideri prima il caso $\alpha = 0$. In tal caso si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \pm\infty.$$

Se $\beta = 0$ (quindi $V(x) = 2x^3/3$) si ha $V'(x) = 0$ solo per $x = 0$, quindi $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale (non può essere un punto di minimo altrimenti ci sarebbe un punto di massimo sul semiasse negativo, e non può essere un punto di massimo altrimenti ci sarebbe un punto di minimo sul semiasse positivo). *Quindi per $\alpha = \beta = 0$ il punto $P_0$ è un punto d'equilibrio instabile.*

Se $\beta \neq 0$ (quindi $V(x) = 2x^3/3 + \beta x^2/2$) si ha $V''(-\beta) = -\beta$, quindi $P_1$ è un punto di minimo relativo per $\beta < 0$ e un punto di massimo relativo per $\beta > 0$. Inoltre si ha $V''(0) = \beta$, quindi $P_0$ è un punto di minimo relativo per $\beta > 0$ e un punto di massimo relativo per $\beta < 0$. *In conclusione, per $\alpha = 0$, se $\beta > 0$ il punto $P_0$ è un punto d'equilibrio stabile e il punto $P_1$ è un punto d'equilibrio instabile, mentre se $\beta < 0$ il punto $P_0$ è un punto d'equilibrio instabile e il punto $P_1$ è un punto d'equilibrio stabile.*

Consideriamo ora il caso $\alpha > 0$. In tal caso si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \infty,$$

quindi $V(x)$ ha sicuramente almeno un punto di minimo (che sarà un punto di minimo assoluto per $V(x)$).

Se $\beta < 1/\alpha$ ci sono anche i punti d'equilibrio $P_\pm$. Se $0 < \alpha\beta < 1$ (i.e. $0 < \beta < 1/\alpha$) si ha $x_- < x_+ < 0$, e quindi $P_-$ e $P_0$ sono punti di minimo, mentre $P_+$ è un punto di massimo. *Quindi per* $\alpha > 0$ *e* $0 < \beta < 1/\alpha$ *il punto* $P_+$ *è un punto di equilibrio instabile, mentre i punti* $P_-$ *e* $P_0$ *sono due punti d'equilibrio stabile.* Se $\alpha\beta < 0$ (i.e. $\beta < 0$) si ha $x_- < 0 < x_+$, e quindi $P_-$ e $P_+$ sono punti di minimo, mentre $P_0$ è un punto di massimo. *Quindi per* $\alpha > 0$ *e* $\beta < 0$ *il punto* $P_0$ *è un punto di equilibrio instabile, mentre i punti* $P_-$ *e* $P_+$ *sono due punti d'equilibrio stabile.* Se infine $\alpha\beta = 0$ (i.e. $\beta = 0$) si hanno i due punti d'equilibrio $P_-$ e $P_0$; poiché in tal caso $x_- < 0$ e $V''(0) = 0$ mentre $V''(x_-) = V''(-2/\alpha) = 4/\alpha > 0$, ne segue che $P_-$ è un punto di minimo, mentre $P_0$ è un punto di flesso orizzontale. *Quindi per* $\alpha > 0$ *e* $\beta = 0$ *il punto* $P_0$ *è un punto d'equilibrio instabile, mentre il punto* $P_-$ *è un punto d'equilibrio stabile.*

Se $\beta = 1/\alpha$ si ha $x_- = x_+$. Inoltre $V''(0) = \beta = 1/\alpha > 0$, mentre $x_- = x_+$ è un punto di flesso orizzontale. *Quindi per* $\alpha > 0$ *e* $\beta = 1/\alpha$ *il punto* $P_0$ *è un punto d'equilibrio stabile mentre il punto* $P_2$ *è un punto d'equilibrio instabile.*

Se $\beta > 1/\alpha$ ci sarà un solo punto d'equilibrio, $P_0$, che sarà necessariamente un punto di equilibrio stabile (in quanto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per $V(x)$). *Quindi per* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 1/\alpha$ *il punto d'equilibrio* $P_0$ *è un punto d'equilibrio stabile.*

Analogamente si discute il caso $\alpha < 0$. In tal caso si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = -\infty,$$

quindi $V(x)$ ha sicuramente almeno un punto di massimo (che sarà un punto di massimo assoluto per $V(x)$).

Se $\beta > 1/\alpha$ ci sono anche i punti d'equilibrio $P_\pm$. Se $0 < \alpha\beta < 1$ (i.e. $0 > \beta > 1/\alpha$) si ha $0 < x_+ < x_-$, e quindi $P_0$ e $P_-$ sono punti di massimo, mentre $P_+$ è un punto di minimo. *Quindi per* $\alpha < 0$ *e* $0 > \beta > 1/\alpha$ *il punto* $P_+$ *è un punto di equilibrio stabile, mentre i punti* $P_0$ *e* $P_-$ *sono due punti d'equilibrio instabile.* Se $\alpha\beta < 0$ (i.e. $\beta > 0$) si ha $x_- < 0 < x_+$, e quindi $P_-$ e $P_+$ sono punti di minimo, mentre $P_0$ è un punto di massimo. *Quindi per* $\alpha < 0$ *e* $\beta > 0$ *il punto* $P_0$ *è un punto di equilibrio instabile, mentre i punti* $P_-$ *e* $P_+$ *sono due punti d'equilibrio stabile.* Se infine $\alpha\beta = 0$ (i.e. $\beta = 0$) si hanno i due punti d'equilibrio $P_-$ e $P_+$; poiché in tal caso $0 < x_-$ e $V''(0) = 0$ mentre $V''(x_-) = V''(-2/\alpha) = 4/\alpha < 0$, ne segue che $P_-$ è un punto di massimo, mentre $P_0$ è un punto di flesso orizzontale. *Quindi per $\alpha < 0$ e $\beta = 0$ i punto $P_0$ e $P_-$ sono entrambi punti d'equilibrio stabile.*

Se $\beta = 1/\alpha$ si ha $x_- = x_+$. Inoltre $V''(0) = \beta = 1/\alpha < 0$, quindi $P_0$ è un punto d'equilibrio instabile in quanto $x = 0$ è un punto di massimo per $V(x)$. Anche $P_2$ sarà un punto d'equilibrio instabile (poiché $x_- = x_+$ sarà un punto di flesso orizzontale). *Quindi per $\alpha < 0$ e $\beta = 1/\alpha$ entrambi i punti $P_0$ e $P_2$ sono punti d'equilibrio instabile.*

Se infine $\beta < 1/\alpha$ ci sarà un solo punto d'equilibrio, $P_0$, che sarà necessariamente un punto di equilibrio instabile (in quanto $x = 0$ è un punto di massimo assoluto per $V(x)$). *Quindi per $\alpha < 0$ e $\beta < 1/\alpha$ il punto $P_0$ è un punto d'equilibrio instabile.*

(ii) La funzione energia

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

è una costante del moto per il sistema dinamico associato. Quindi, per ogni dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y})$, la corrispondente traiettoria avrà luogo sulla curva di livello $\Gamma_E$ determinata dall'equazione $H(x, y) = H(\bar{x}, \bar{y}) = E$.

Per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ la funzione $V(x)$ è come rappresentata in Figura 1.

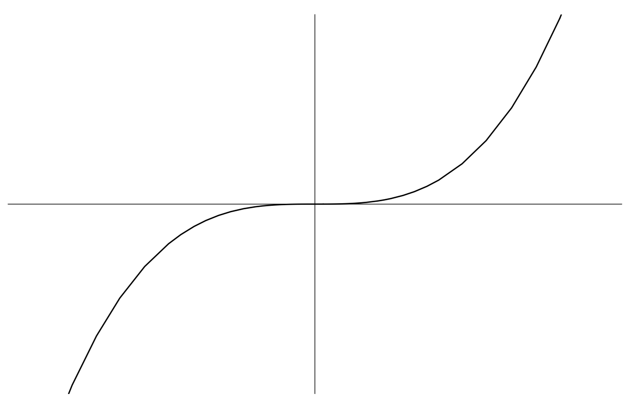

**Figura 1.** Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Le curve di livello nel piano $(x, y)$ sono quindi tutte curve aperte e regolari, tranne la curva di livello $\Gamma_0$ che avrà una cuspide in $x = 0$, in quanto determinata dall'equazione $y = \pm\sqrt{4/3}(-x)^{3/2}$, con $x \leq 0$. Tutte le traiettorie sono illimitate; per $E = 0$ le traiettorie sono asintotiche a $P_0$ per $t \to +\infty$ se $y(0) > 0$ e per $t \to -\infty$ se $y(0) < 0$.

Per $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ la funzione $V(x)$ è come rappresentata in Figura 2.

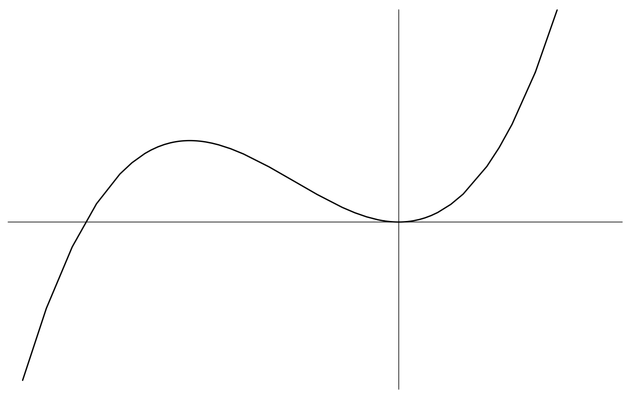

**Figura 2.** Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

Quindi per $E < 0$ si hanno solo orbite $\gamma_E$ aperte definite per $x < x(E)$, dove $x(E) < 0$ è l'unica radice reale dell'equazione $V(x(E)) = E$. Per $E = 0$, oltre alla curva aperta $\gamma_0$ si ha anche il punto d'equilibrio $P_0$. Sia $E_0$ il valore di energia tale che $V(-\beta/2) = \beta^3/24 = E_0$. Per $0 < E < E_0$ si ha una curva aperta $\gamma_E$ e una curva chiusa $\delta_E$, definita da $y = \pm\sqrt{2(E - V(x)}$, per $x_-(E) \leq x \leq x_+(E)$, con $x(E) < x_-(E) < x_+(E)$ sono le tre radici reali dell'equazione $V(x) = E$. Per $E = E_0$ si ha una curva di livello contenente il punto d'equilibrio $P_1$, una curva limitata asintotica a $P_1$ per $t \to \pm\infty$, e due curve illimitate, una nel semipiano superiore, asintotica a $P_1$ per $t \to \pm\infty$ e una nel semipiano inferiore, asintotica a $P_1$ per $t \to -\infty$. Le tre curve (separatrici) si congiungono quindi in $P_2$, dove arrivano in modo tale che $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ è lineare (cioè con tangenza obliqua). Infine per $E > E_0$ si ha una sola curva aperta, definita per $x < x(E)$, dove $x(E) > x_+(E_0)$ è l'unica radice reale di $V(x) = E$.

Per $\alpha = 0$ e $\beta < 0$ la funzione $V(x)$ è come rappresentata in Figura 3, e le curve di livello possono essere discusse allo stesso modo.

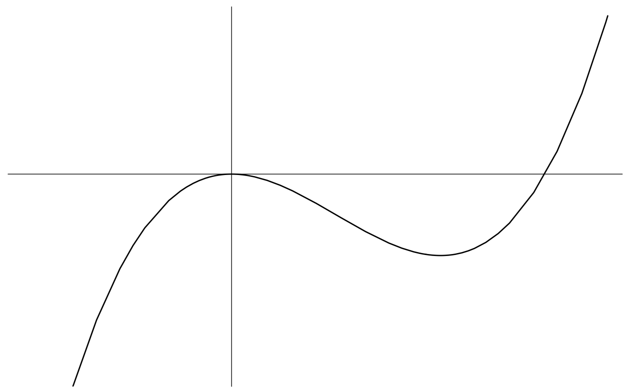

**Figura 3.** Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta < 0$.

In particolare se si definisce $E_1 < 0$ il valore di energia per cui si ha $V(-\beta/2) = \beta^3/24 = E_1$, adesso $E_1$ ed $E = 0$ giocano il ruolo che avevano prima (nel caso $\beta > 0$) $E = 0$ ed $E_0$, rispettivamente.

(iii) Dall'analisi del punto precedente si ottiene quanto segue.

Per $\beta = 0$ ci sono due traiettorie asintotiche, quelle con dati iniziali sulla curva di livello $\Gamma_0$: se il dato iniziale ha velocità positiva (quindi $y(0) > 0$) allora la traiettoria è asintotica a $P_0$ per $t \to +\infty$, mentre se il dato iniziale ha velocità negativa (quindi $y(0) < 0$) allora la traiettoria è asintotica a $P_0$ per $t \to -\infty$. Tutte le traiettorie distinte dal punto d'equilibrio $P_0$ sono illimitate.

Se $\beta \neq 0$, ci sono traiettorie periodiche, in corrispondenza dei dati iniziali $(x(0), y(0))$ tali che $0 < H(x(0), y(0)) < E_0$ e $x(0) > -\beta/2$, per $\beta > 0$, e $E_1 < H(x(0), y(0)) < 0$ e $x(0) > 0$, per $\beta < 0$. Il moto lungo le separatrici è asintotico e limitato se $x(0) > -\beta/2$, per $\beta > 0$, e se $x(0) > 0$, per $\beta < 0$, ed è asintotico e illimitato nei casi restanti. Tutte le altre traiettorie, distinte dai punti d'equilibrio, sono illimitate sia nel passato sia nel futuro.

**1.5 (25 punti.)**

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $f'(x) = (x^3 - 2x)e^{-x}$, da cui

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ oppure } x = \pm\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{2} \text{ oppure } -\sqrt{2} < x < 0.$$

Essendo $f''(x) = (-x^3 + 3x^2 + 2x - 2)e^{-x}$, si ha

$$f''(0) = -2 < 0\ ,\ f''(\pm\sqrt{2}) = 4e^{\pm\sqrt{2}} > 0$$

e perciò 0 è un punto di massimo relativo, $\pm\sqrt{2}$ di minimo relativo.

Calcolando l'integrale (per parti) si ottiene

$$f(x) = 4 - (x^3 + 3x^2 + 4x + 4)e^{-x}$$

e si calcolano così i limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, e i valori $f(\sqrt{2}) \simeq -\frac{1}{2}$, $f(-\sqrt{2}) \simeq -2{,}2$ (ovviamente $f(0) = 0$). $x = -\sqrt{2}$ è dunque il punto di minimo assoluto.

**1.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.**