AM210-2014/15: Tracce delle lezioni- IX Settimana

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ definite in un aperto $O \subset \mathbf{R}$ determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1(O)$ tali che

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in O \qquad \textbf{(ED)}$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.

Tale equazione é **lineare** perché l'operatore (*differenziale*)

$$\mathcal{D} : C^1(O) \to C(O), \qquad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x)$$

é **lineare**, cioé $\mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Quindi l'insieme delle soluzioni di (ED) é $Ker\mathcal{D} + \overline{y}$ ove $\mathcal{D}\overline{y} = b$. In particolare, se $Ker\mathcal{D} \neq \{0\}$, ed (ED) ha soluzione, allora ne ha infinite.

(ED) é **del primo ordine** perché nell'equazione compare solo la *derivata prima.*

Come osservato, (ED), se ha una soluzione, ne ha infinite. Fissato peró $x_0 \in O$ (**'punto iniziale'**) e y_0 (**'valore iniziale'**), il **problema di Cauchy** per (ED)

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in O, \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ ha, come vedremo, al piú una soluzione, ma solo se O é un intervallo! Dunque, di norma O **sará un intervallo aperto** I.

Se $a \equiv 0$, (ED) diventa $\quad y' = b \quad$ e le sue soluzioni sono le **primitive** di b.

Condizione necessaria (Teorema di Darboux) perché $b(x)$ ammetta primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (PVI).

Tale proprietá non é peró sufficente. Ad esempio,

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \sin^2 \frac{1}{x} \quad se \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

ha la (PVI), ma non é dotata di primitiva su tutto $\mathbf{R}$. La sua primitiva, nulla in $x=0$, é pari e, sui positivi, é data da $P(x) := \int\limits_0^x \sin^2 \frac{1}{t} dt = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau.$ Ora, supposto che $P'(0)$ esista, deve valere, per paritá, zero.
D'altra parte, se δ é tale che $\{x \in [0,\pi] : \sin^2 x \geq \delta\} = [\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi+1}{2}]$ (che ha lunghezza 1), e preso $x = \frac{1}{n\pi}$, troviamo

$$0 \; = \; P'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x} = \lim_n \; n\pi \int\limits_{n\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau \;\; \geq$$

$$\lim_n \; n\delta\pi \sum_{k\geq n} \int\limits_{k\pi+\frac{\pi-1}{2}}^{k\pi+\frac{\pi+1}{2}} \frac{d\tau}{\tau^2} \;\geq\; \lim_n \; \frac{n\delta}{4\pi} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^2} \;\geq\; \frac{\delta}{4\pi}$$

Dunque P non é derivabile in $x=0$.

La continuitá di $b(x)$ é sufficente per l'esistenza di una primitiva di b:

se b é continua le primitive di b esistono e, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), sono date, tutte, da

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(t)dt \qquad x_0 \in (a,b), \quad y_0 \in \mathbf{R}$$

Tale funzione é anche **l'unica soluzione del Problema di Cauchy (PC)**.

Tuttavia, **la continuitá di $b(x)$ non é necessaria**: la funzione

$$f(x) \; = \; 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0, \qquad f(0)=0 \qquad \text{é discontinua in zero}$$

ma é la derivata (in tutto $\mathbf{R}$) di $P(x) := x^2 \sin\frac{1}{x}$, $P(0)=0$.

Comunque sia, **la continuitá di $b(x)$ é essenziale**:

se $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\forall x \neq 0$, $f(0)=c$, allora

$$P'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = |x| + c \quad \Rightarrow \quad P'(0) \quad \text{non esiste.}$$

Dunque, richiederemo sempre ai dati di essere continui.

INTEGRALE GENERALE DI (ED)

Siano $a, b \in C(I)$. Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, troviamo

$$\left(y(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \right)' = [y'(x) + a(x)y(x)] e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right] \qquad (IG)$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama appunto Integrale Generale di (ED).

Equazioni lineari omogenee del I e II ordine a coefficenti costanti.
Dato $\lambda \in \mathbf{R}$, $y' - \lambda y = 0$ ha come soluzioni le funzioni $ce^{\lambda x}$, $c \in \mathbf{R}$. Dunque, se

$$Dy := y', \qquad (D - \lambda I)y := y' - \lambda y, \qquad D - \lambda I : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$$

$D - \lambda := D - \lambda I$ é operatore lineare di $C^\infty(\mathbf{R})$ in se e e si ha

$$ker(D - \lambda) = < e^{\lambda x} >$$

Dati $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, l'equazione $y' - \lambda y = e^{\mu x}$ ha come soluzioni le funzioni

$$y(x) = ce^{\lambda x} + \frac{e^{\mu x}}{\mu - \lambda} \quad se \quad \mu \neq \lambda \qquad\qquad y(x) = (y(0) + x)e^{\lambda x} \quad se \quad \lambda = \mu$$

Dunque, $\quad (D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' - \lambda_2 y \in Ker(D - \lambda_1) \quad \Leftrightarrow$

$\overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Leftrightarrow} \quad y = c_2 e^{\lambda_2 x} \quad op. \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} \Leftrightarrow Ker\,[(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_2)] = < e^{\lambda_1 x}\,, e^{\lambda_2 x} >$

$\overset{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}{\Longleftrightarrow} \quad y = c_1\, e^{\lambda x} \quad oppure \quad y = c_2\, x\, e^{\lambda x} \quad \Leftrightarrow \quad Ker(D - \lambda)^2 = < e^{\lambda x}\,, xe^{\lambda x} >$

Osserviamo che

$$(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_2)y = (D - \lambda_1)(y' - \lambda_2 y) = y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y$$

Dunque $\quad Ker\,[(D-\lambda_1)\circ(D-\lambda_2)]\quad$ é l'insieme delle soluzioni di una *equazione del secondo ordine, lineare, omogenea a coefficenti costanti.* Tale equazione si puó riscrivere

$$p(D)y = 0$$

ove $\quad p(\lambda) := (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2\quad$ (é il polinomio di secondo grado aventi radici -reali- λ_1, λ_2) $\quad$ ed abbiamo usato la

NOTAZIONE $\quad$ Dati $\quad a_j \in \mathbf{R}\quad$ e $\quad p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad z \in \mathbf{C}$

$$p(D) := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad\qquad D^k = \frac{d^k}{dx^k} \quad D^0 := I$$

$p(D)$ definisce un operatore (differenziale) lineare di $C^\infty(\mathbf{R})$ in sé:

$$p(D): C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$$

$$p(D)y := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y \qquad\qquad \forall y \in C^\infty(\mathbf{R})$$

Per induzione, possiamo ora vedere che, se $\quad (D-\lambda)^k := \overbrace{(D-\lambda)\circ\ldots\circ(D-\lambda)}^{k\ volte}$

$$Ker(D-\lambda)^{k+1} = < e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots, x^k\, e^{\lambda x} >$$

Infatti, $\quad Ker(D-\lambda)^k = < e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots, x^{k-1}\, e^{\lambda x} >, \quad (D-\lambda)^{k+1}y = 0 \quad \Rightarrow$

$$(D-\lambda)y \in Ker(D-\lambda)^k \quad \Rightarrow \quad y' - \lambda y = (c_1 x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1})e^{\lambda x} \quad \Rightarrow$$

$$(ye^{-\lambda x})' = c_1 x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1} \quad \Rightarrow \quad ye^{-\lambda x} = c_0 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{k}c_{k-1}x^k$$

Torniamo all'equazione del secondo ordine $\quad p(D)y = 0\quad$ nel caso, rimasto, che p abbia due radici complesse, necessariamente coniugate, $\lambda, \overline{\lambda}$, ovvero

$$p(z) = (z-\lambda)(z-\overline{\lambda}) = z^2 - (\lambda+\overline{\lambda})z + \lambda\overline{\lambda} = z^2 - 2(Re\lambda)z + |\lambda|^2$$

$$p(D)y \;=\; [(D-\lambda)\circ(D-\overline{\lambda})]y = D^2y - 2(Re\lambda)\,Dy + |\lambda|^2$$

Per proceder come nel caso reale, con peró $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$, occorrerá ammettere funzioni a valori complessi $\quad z(x) = y(x) + iw(x)\quad$, convenendo che $\quad D^k(y+iw) = y' + iw'$. Siccome $z' = \lambda z \;\Leftrightarrow\; z(x) = ce^{\lambda x},\ c \in \mathbf{C}$, $\;$ é $\quad Ker(D-\lambda) = \,< e^{\lambda x} >_{\mathbf{C}}\;$ e quindi

$$(D-\lambda z) \in Ker(D-\overline{\lambda}) \Leftrightarrow (ze^{-\lambda x})' = (z'-\lambda z)e^{-\lambda x} = c_1 e^{(\overline{\lambda}-\lambda)x} \Leftrightarrow \quad z = c_2 e^{\lambda x} + c_1 e^{\overline{\lambda}x}$$

ove $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$. $\quad$ Dunque $\quad Ker\, p(D) = \,< e^{\lambda x}, e^{\overline{\lambda}x} >$. $\quad$ Sia $\quad \lambda = \alpha + i\beta$. Siccome $c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\overline{\lambda}x} \in \mathbf{R}\quad \forall x \in \mathbf{R} \quad\Leftrightarrow\quad c_2 = \overline{c}_1$, $\quad$ le soluzioni reali sono

$$Re((a_1 + ia_2)e^{(\alpha+i\beta)x} \;=\; a_1 e^{\alpha x}\cos\beta x \,-\, a_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad a_1, a_2 \in \mathbf{R}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE SUPERIORE A COEFFICENTI COSTANTI OMOGENEE

Notazione: dati $a_j \in \mathbf{R}$, scriviamo $\quad p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad z \in \mathbf{C} \quad$ e

$$p(D) := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0 y,$$

$p(D)$ definisce un operatore (differenziale) lineare di $C^\infty(\mathbf{R})$ in sé:

$$p(D) : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R}), \qquad p(D)y := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y \quad \forall y \in C^\infty(\mathbf{R})$$

Una equazione differenziale lineare (EDL) di ordine n omogenea a coefficenti costanti a_j é come segue

$$(EDL) \qquad p(D)y := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

Una soluzione di (EDL) é una funzione $y \in C^n(I)$, I intervallo in $\mathbf{R}$.

1.1 Regolaritá C^∞ delle soluzioni. Se $y \in C^n(I)$ é soluzione di (EDL), da

$$y^{(n)} = -[a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y] \qquad (EDL)$$

segue che $y^{(n)} \in C^1(I)$ ovvero $y \in C^{n+1}$. Quindi $y' \in C^n$ e, derivando (EDL), vediamo allora che anche y' é soluzione di (EDL) in I e quindi $y' \in C^{n+1}$, ovvero $y \in C^{n+2}$. Iterando, vediamo che f é in effetti derivabile quanto si vuole.

1.2 Analiticitá delle soluzioni. Sia y soluzione in I di (EDL). Trattandosi di una equazione autonoma, possiamo supporre che I sia centrato nell'origine. Vogliamo mostrare che y é analitica in I. A tale scopo occorre e basta ottenere stime (opportune) sulle derivate di y. Conviene, a tale scopo, riscrivere (EDL) in forma vettoriale come *sistema del I ordine.* Posto

$$x_1(t) := y(t), \quad x_2(t) := y'(t), \ldots, x_n(t) := y^{(n-1)}(t) \qquad t \in I \qquad \text{per cui}$$

$$\dot{x}_1 = y' \quad \dot{x}_2 = y'' \quad \dot{x}_n = y^{(n)} = -[a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y] \qquad in \quad I$$

il vettore $\quad x := (x_1, \ldots, x_n) \in C^1(I, \mathbf{R}^n) \quad$ soddisfa il seguente sistema differenziale

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = x_3 \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n \\ &\dot{x}_n = y^{(n)} = -[a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_0 x_1] \end{aligned}$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \qquad \mathcal{A} = (a_{ij})_{|i,j=1,\ldots,n}$$

ove le prime $n-1$ righe di $\mathcal{A}$ sono i vettori $e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$ mentre l'ultima riga é il vettore $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$. Otteniamo subito, indicando con $\|.\|_2$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$, che

$$\|\dot{x}(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\| \, \|x(t)\|_2 \qquad \forall t \in I$$

D'altra parte, derivando l'equazione $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ troviamo $D^2 x = \mathcal{A}(Dx) \quad$ e quindi

$$\|D^2 x(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\| \, \|Dx(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|^2 \, \|x(t)\|_2 \quad \forall t \in I$$

e quindi, iterando,

$$\|D^k x(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|^k \, \|x(t)\|_2 \quad \forall t \in I$$

e quindi, indicata con $\|.\|_{\infty,R}$ la norma del sup in $C([-R,R], \mathbf{R}^n)$, $\quad [-R,R] \subset I$, troviamo che

$$\sup_{t \in [-R,R]} |D^k y(t)| = \sup_{t \in [-R,R]} |D^k x_1(t)| \leq \|D^k x\|_{\infty,R} \leq \|\mathcal{A}\|^k \, \|x\|_{\infty,R}$$

Ció assicura che y é analitica in I.

2. Esistenza globale. Sia $y \in C^\infty(I)$ soluzione in I di (EDL). Per quanto sopra, se $[-R,R] \subset I$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \, t^k \qquad \forall t \in [-R,R]$$

Siccome tale serie ha raggio di convergenza infinito perché $\quad |y^{(k)}(0)| \leq c\|\mathcal{A}\|^k \quad \forall k$ concludiamo che y é ineffetti definita su tutto $\mathbf{R}$ come somma della propria serie di Mac Lauren (y é funzione 'intera'). Ovviamente, come si vede mettendo tale serie in (EDL), y é in particolare soluzione su tutto $\mathbf{R}$ di (EDL).

3. Unicitá per il problema di Cauchy (PC). Dati $y_0, \ldots, y_{n-1}$, il problema

$$\textbf{(PC)} \quad \exists y \in C^\infty \quad t.c. \quad p(D)y = 0, \qquad y(0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

ha al piú una soluzione. Per linearitá, ció equivale a dire che

$$p(D)y = 0, \qquad y(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0$$

E ció segue dal fatto che , $\quad y(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0, \quad y \quad$ soluzione $\Rightarrow$

$$y^{(n)}(0) = -[a_{n-1} y^{(n-1)}(0) + \ldots + a_0 y(0) = 0] \quad \Rightarrow \quad y^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$$

Essendo y analitica, ció implica che $\quad y \equiv 0$

4. L'Integrale Generale di (EDL) . L'IG di (EDL), ovvero l'insieme di tutte le soluzioni di (EDL) $\{y \in C^\infty(\mathbf{R}) : \quad p(D)y = 0\}$ é il sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbf{R})$ dato da

$$\mathcal{N} := Ker\, p(D) \qquad (il \quad nucleo \quad di \quad p(D))$$

In analogia con il caso del primo ordine, vediamo se ci sono soluzioni della forma $y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$. Ponendo $y(x) = e^{\lambda x}$ nell'equazione, vediamo che tale funzione é soluzione dell'equazione se e solo se λ é zero del polinomio (che determina l'equazione)

$$p(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

e che d'ora in poi chiameremo **polinomio caratteristico**. Infatti,

$$D^j e^{\lambda t} = \lambda^j e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad p(D)[e^{\lambda t}] = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j [e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda^j = e^{\lambda t} p(\lambda)$$

Tuttavia, il polinomio caratteristico potrebbe anche non avere zeri reali.
Conviene allora considerare anche **soluzioni complesse** $y + iw, y, w \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ di (EDL), ove, naturalmente, $D^k(y + iw) := D^k y + iD^k w$. Notiamo che

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \qquad e \qquad p(D)(e^{\lambda x}) \; = \; p(\lambda)\, e^{\lambda x} \; = \; 0 \Leftrightarrow p(\lambda) \; = \; 0$$

Notiamo anche che
$y \in \mathcal{N} \Leftrightarrow y = Re z, \quad z(x)$ **soluzione, eventualmente complessa, di (EDL).**
Infatti,

$$y, w \in \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad p(D)(y+iw) = p(D)y+ip(D)w = 0. \quad \text{Viceversa,} \quad p(D)(y+iw) = 0$$

$$\Rightarrow p(D)(y - iw) = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{(y + iw) + (y - iw)}{2}, \; w = \frac{(y + iw) - (y - iw)}{2i} \in \mathcal{N}$$

perché $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ (giacché $p(z)$ ha coefficenti reali) e che combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni. Siccome poi, di nuovo,

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} \quad \Rightarrow \quad [p(\overline{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\lambda) = 0]$$

ogni radice del polinomio caratteristico, dá, insieme alla sua complessa coniugata, una coppia di soluzioni reali. Ad esempio,

$$p(\alpha + i\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \in \mathcal{N}$$

Ora, il polinomio caratteristico avrá $k \leq n$ radici distinte, diciamo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, di molteplicitá, diciamo, n_j, con, quindi $n_1 + \ldots + n_k = n$. Possiamo allora fattorizzare $p(z)$ e, allo stesso modo, $p(D)$:

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \times \cdots \times (z - \lambda_k)^{n_k} \qquad\qquad p(D) = (D - \lambda_1)^{n_1} \circ \cdots \circ (D - \lambda_k)^{n_k}$$

OSSERVAZIONE

1. λ é radice di $p(z)$ di molteplicitá $m \Rightarrow p(D)(x^j e^{\lambda x}) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, m-1$

Visto che la fattorizzazione di $p(D)$ contiene $(D-\lambda)^m$, basterá provare che

$$(D-\lambda)^m (x^j e^{\lambda x}) = 0 \qquad \forall j \le m-1$$

Infatti risulta $(D-\lambda)^{j+1}(x^j e^{\lambda x}) = (D-\lambda)^j[(D-\lambda)(x^j e^{\lambda x})] =$ $(D-\lambda)^j[jx^{j-1}e^{\lambda x} + \lambda x^j e^{\lambda x} - \lambda x^j e^{\lambda x}] = (D-\lambda)^j[jx^{j-1}e^{\lambda x}] = \dots = j!(D-\lambda)[e^{\lambda x}] = 0$ e quindi $(D-\lambda)^m(x^{m-1}e^{\lambda x}) = 0$. Inoltre, se $j \le m-1$, segue ugualmente $(D-\lambda)^m(x^{j-1}e^{\lambda x}) = (D-\lambda)^{m-j} \circ (D-\lambda)^j(x^{j-1}e^{\lambda x}) = 0$.

2. $z' - \lambda z = x^q e^{\mu x} \quad \Leftrightarrow \quad (ze^{-\lambda x})' = x^q e^{(\mu-\lambda)x} \quad \Leftrightarrow \quad ze^{-\lambda x} = \int x^q e^{(\mu-\lambda)x} dx \quad \Leftrightarrow$

$$\overset{\lambda \ne \mu}{\Longleftrightarrow} ze^{-\lambda x} = c + [c_0 + c_1 x \dots + c_q x^q]\, e^{(\mu-\lambda)x} \quad \Longleftrightarrow \quad z = ce^{\lambda x} + e^{\mu x}\,[c_0 + c_1 x \dots + c_q x^q]$$

$$\overset{\lambda = \mu}{\Longleftrightarrow} \qquad ze^{-\lambda x} = c_0 + c_1 x^{q+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = [c_0 + c_1\, x^{q+1}]\, e^{\lambda x}$$

per certe costanti c_j.

Proviamo ora che, se

$$p_n(z) = (z-\lambda_1)^{n_1} \times \dots \times (z-\lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \dots + n_k = n$$

$$p_n(D) = (D-\lambda_1)^{n_1} \times \dots \times (D-\lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \dots + n_k = n$$

allora

$$ker\, p_n(D) = < e^{\lambda_1 x},\ x\, e^{\lambda_1 x}, \dots,\ x^{n_1-1}\, e^{\lambda_1 x}, \dots\dots,\ e^{\lambda_k x},\ x\, e^{\lambda_k x}, \dots,\ x^{n_k-1}\, e^{\lambda_k x} >$$

Infatti, la descrizione di $Ker\,(D)$ vale se $n = 2$. Proviamo che se vale per un n allora vale anche per $n+1$.
Sia dunque $p_{n+1}(z) = (z-\lambda_1)^{n_1} \times \dots \times (z-\lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \dots + n_k = n+1$.

Distinguiamo due casi: I. $n_j = 1 \quad \forall j$ II. *(l'indice é irrilevante)* $n_k > 1$.

I caso. Da $Ker\,[(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_n)] =< e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x} >$ segue che

$$z \in Ker[(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_n)(D-\lambda_{n+1})] \quad \Leftrightarrow \quad z' - \lambda_{n+1} z \in Ker[(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_n)]$$

$$\Leftrightarrow \quad (ze^{-\lambda_{n+1}x})' = e^{-\lambda_{n+1}x}\left[c_1\, e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}\right] \quad \Leftrightarrow \quad ze^{-\lambda_{n+1}x} =$$

$$c_0 + e^{-\lambda_{n+1}\, x}\left[c_1'\, e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n' e^{\lambda_n x}\right] \quad \Leftrightarrow \quad z = c_0 e^{\lambda_{n+1}\, x} + \left[c_1'\, e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n' e^{\lambda_n x}\right]$$

II caso. $\quad z \in Ker\ [(D-\lambda_1)^{n_1} \times \cdots \times (D-\lambda_k)^{n_k}], \quad n_1 + \ldots + n_k = n+1 \quad \Leftrightarrow$

$$z' - \lambda_k z \in Ker\ \left[(D-\lambda_1)^{n_1} \times \cdots \times (D-\lambda_k)^{n_k - 1}\right], \quad n_1 + \ldots + n_k - 1 = n \quad \Leftrightarrow$$

$$z' - \lambda_k z \in < e^{\lambda_1 x},\ x\, e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{n_1 - 1}\, e^{\lambda_1 x}, \ldots\ldots, e^{\lambda_k x},\ x\, e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{n_k - 1}\, e^{\lambda_k x} > \quad \Leftrightarrow$$

$$(z e^{-\lambda_k x})' \ = \ e^{-\lambda_k x} \left(\sum_{j=1}^{n_1} c_{1,j} x^{j-1} e^{\lambda_1\, x} + \cdots + \sum_{j=1}^{n_k - 1} c_{k,j} x^{j-1} e^{\lambda_k\, x} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$z = e^{\lambda_k x} \left[c_0 + \sum_{j=1}^{n_1} c_{1,j} \int x^{j-1} e^{(\lambda_1 - \lambda_k)\, x}\, dx + \cdots + \sum_{j=1}^{n_k - 1} c_{k,j} \int x^{j-1}\, dx \right] \quad \Leftrightarrow$$

$$z = c_0' e^{\lambda_k x} + \ e^{\lambda_1\, x} \sum_{j=1}^{n_1} c_{1,j}' x^{j-1} + \cdots + \ e^{\lambda_k\, x} \sum_{j=1}^{n_k - 1} c_{k,j}' x^{j}$$

Ricordando che a radici caratteristiche complesse coniugate corrispono seni e coseni, concludiamo con la lista esplicita delle soluzioni di $p(D)y = 0$, laddove $p(z)$ abbia

$$p \text{ radici reali} \quad \lambda_j \quad \text{di molteplicitá } m_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

$$2q \text{ radici complesse} \quad \alpha_j \pm i\beta_j \quad \text{di molteplicitá } \tilde{m}_j, \quad j = 1, \ldots, q$$

L'equazione (EDL) ha le n soluzioni

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots\ldots e^{\lambda_p x}, \ldots, x^{m_p - 1} e^{\lambda_p x}$$

$$e^{\alpha_1 x}\ \cos \beta_1 x, \quad e^{\alpha_1 x}\ \sin \beta_1 x, \ldots, x^{\tilde{m}_1 - 1} e^{\alpha_1 x}\ \cos \beta_1 x, \quad x^{\tilde{m}_1 - 1} e^{\alpha_1 x}\ \sin \beta_1 x$$

$$e^{\alpha_q x}\ \cos \beta_q x, \quad e^{\alpha_q x} \sin \beta_q x, \ldots\ldots x^{\tilde{m}_q - 1} e^{\alpha_q x}\ \cos \beta_q x, \quad x^{\tilde{m}_q - 1} e^{\alpha_q x} \sin \beta_q x$$

5. Sistema fondamentale per (EDL): $dim\, \mathcal{N} = n$ **.** Si puó verificare che le n soluzioni di (EDL) trovate al punto 4. hanno **Wronskiano** diverso da zero, ove, date $z_j \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, il loro Wronskiano é il determinante della matrice $n \times n$ formata dalle z_j e dalle loro prime $n-1$ derivate:

$$W(x) = W_{z_1,\dots,z_n}(x) := \det\left(z_j^{(i-1)}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n} \qquad \textbf{(Wronskiano)}$$

Proviamo che
se $z_j, j = 1, \dots, n$ sono soluzioni (complesse) di (EDL) con $W(x) \neq 0$ allora ogni altra soluzione (complessa) di (EDL) é combinazione lineare delle z_j.
Sia dunque $p(D)z = 0$. Da $W(0) \neq 0$, segue che esiste $C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{C}^n$ (soluzione del sistema lineare $n \times n$)

$$\left(z_j^{(i-1)}(t)\right)_{i,j=1,\dots,n} C = z(0)$$

Ma allora $\tilde{z} := \sum_{j=1}^n c_j z_j$ é soluzione di (EDL) (perché combinazione lineare di soluzioni) tale che $\tilde{z}(0) = z(0)$. Dall'unicitá della soluzione del problema di Cauchy segue che $z = \tilde{z}$.
In particolare, $dim\mathcal{N} \leq n$. D'altra parte, le z_j sono linearmente indipendenti, perché $z(x) := \sum_{j=1}^n c_j z_j(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad D^k z(0) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n-1$, ovvero $\left(z_j^{(i-1)}(t)\right)_{i,j=1,\dots,n} = 0$ e quindi, essendo $W(0)$ (il determinante della matrice dei coefficenti) non nullo, deve essere $C = (c_1, \dots, c_n) = 0$. Concludiamo quindi che $dim\mathcal{N} = n$.

NOTA (su *lineare indipendenza e wronskiano*). Abbiamo visto che

$$\exists x_0 : \quad W_{z_1,\dots,z_n}(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_1, \dots, z_n \quad \text{sono} \quad \text{linearmente} \quad \text{indipendenti}$$

Il viceversa é falso, in generale. Esempio:

$$z_1(x) = x^2, \quad z_2(x) = x^2 \quad se \quad x \geq 0, \quad z_2(x) = -x^2 \quad se \quad x \leq 0$$

Il viceversa diventa vero se le z_j sono soluzioni di (EDL): date $z_1, \dots, z_n$, é vero che

$$p(D)z_j = 0 \quad \forall j, \quad z_j \quad \text{linearmente} \quad \text{indipendenti} \quad \Rightarrow \quad W_{z_1,\dots,z_n}(x) \neq 0 \quad \forall x$$

Infatti, se esistesse x_0 tale che $W_{z_1,\dots,z_n}(x_0) = 0$, esisterebbe $C = (c_1, \dots, c_n) \neq 0$ tale che

$$\left(z_j^{(i-1)}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n} C = 0$$

Posto $z := \sum_{j=1}^n c_j z_j$, questa sarebbe una soluzione di (EDL)nulla in x_0 assieme alle sue prime $n-1$ derivate. Per l'unicitá della soluzione del Problema di Cauchy, z sarebbe la funzione nulla, cioé le z_j sarebbero linearmente dipendenti.