AM210 2014-15: Tracce delle lezioni- IV Settimana

SUCCESSIONI CONVERGENTI in uno SPAZIO NORMATO

Sia $(E, \|.\|)$ spazio normato. Siano $x_k, x \in E$. Allora

$$x_k \to_k x \quad \Leftrightarrow \quad \|x_k - x\| \to_k 0$$

(i) $u_k, v_k \in E, u_k \to u, v_k \to v \quad \Rightarrow \quad tu_k + sv_k \to tu + sv \qquad \forall t, s \in \mathbf{R}$
(ii) x_k converge $\Rightarrow$ $\sup_k ||x_k|| < +\infty$ (ma non viceversa)

In $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea $\|.\|_2$: $v_k \to_k v$ in $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \|v_k - v\|_2 \to_k 0$.
Se $v_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, $v = (x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2 \to_k 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \quad x_{k,n} \to_k x_n$$

In $C([a,b])$ con $\|f\|_\infty$: $f_n \to f \Leftrightarrow f_n$ converge a f uniformemente in $[a,b]$.

PRODOTTO SCALARE, NORME HILBERTIANE

Sia V spazio lineare su $\mathbf{R}$. Una $b : V \times V \to V$ si dice prodotto scalare in V se é

simmetrica $b(u,v) = b(v,u) \qquad \forall u, v \in V$
bilineare: $b(su + tv, w) = sb(u,w) + tb(v,w), \qquad \forall u, v, w \in V, \forall s, t \in \mathbf{R}$
positiva $b(u,u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$

Un prodotto scalare, se non c'é confusione, si indica usualmente $< .,. >$.

NOTA. Se $< .,. >$ é prodotto scalare in V, allora, per ogni $u \in V$,

le applicazioni $v \to < u, v >$ sono lineari.

ESEMPI In $\mathbf{R}^n$, se $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$, $< x, y > := \sum_{j=1}^n x_j y_j$.
Piú in generale, se V é uno spazio vettoriale con base e_j, $j = 1, \ldots, n$, allora

$$< \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j > \ := \ \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad \text{é prodotto scalare in } V.$$

In $C([a,b])$, $< f, g > := \int_a^b f(x) g(x) dx$, é un prodotto scalare.

CAUCHY-SCHWARTZ Sia $< .,. >$ prodotto scalare in V. Sia

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >} \quad \forall v \in V$$

Allora $\qquad | < u, v > | \ \leq \ \|u\| \ \|v\| \qquad \forall u, v \in V.$

Corollario: $\quad v \to \sqrt{< v, v >}$ é una norma.

Prova. $\quad 0 \ \leq < u + tv, u + tv > = \ \|u\|^2 \ + 2t \ < u, v > \ + t^2\|v\|^2 \quad \forall t$ $\Rightarrow \ < u, v >^2 - \|u\|^2 \, \|v\|^2 \ \leq \ 0.$

Inoltre, $\sqrt{< v, v >} \ \geq \ 0$ e $\sqrt{< v, v >} = 0 \Rightarrow v = 0$. Infine :

$$\|u+v\|^2 \ = \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \ \leq \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \, \|v\| \ = \ (\|u\| + \|v\|)^2$$

Esempi. In $\mathbf{R}^n$, $\quad \|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ é una norma (la *norma euclidea*)

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Prodotto scalare e norma in l^2. Se $\alpha, \beta \in l^2$, allora, per ogni N risulta

$$\sum_{j=1}^N |\alpha(j)\beta(j)| \leq \left(\sum_{j=1}^N |\alpha(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N |\beta(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\beta(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Dunque $\sum_{j=1}^\infty \alpha(j) \, \beta(j)$ é assolutamente convergente e dunque definisce un prodotto scalare su l^2, cui corrisponde la norma $\qquad \|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

In $C([a, b])$. La norma associata al prodotto scalare $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$ é $\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$. La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si scrive

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_a^b |f|^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \ \left(\int_a^b |g|^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Norme che non derivano da un prodotto scalare

In $\mathbf{R}^n$. Se $p \geq 1, p \neq 2$, $\quad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$; $\qquad \|x\|_\infty := max_j |x_j|$.

In $C([a, b])$: $\qquad \|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|.\|_p \quad$ per $p \neq 2$.

ORTOGONALITÁ. Sia $< .,. >$ prodotto scalare in V. Due vettori u, v si dicono tra loro ortogonali se $< u, v >= 0$.

Se $A \subset V$, $A^{\perp} := \{v \in V : \ < v, h >= 0 \quad \forall h \in A\}$, e si vede subito che $A^{\perp} \ = < A >^{\perp}$ ove $< A >:= \{\sum\limits_{finita} \alpha_j v_j : \quad \alpha_j \in \mathbf{R}, v_j \in A\}$, insieme delle combinazioni lineari di elementi di A, é la varietá lineare generata da A).
Si vede subito anche che $A^{\perp}$ é sottospazio lineare di V.

Teorema di PITAGORA. $< u, v >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$

Infatti $\|u+v\|^2 =< u+v, u+v >= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$.

Sistemi ortonormali di vettori, proiezioni ortogonali

Vettori $e_j \in V$, $j \in \mathbf{N}$ formano un sistema ortogonale se
$i \neq j \quad \Rightarrow \quad < e_i, e_j >= 0$. Il sistema é ortonormale se, di piú, $< e_i, e_i >= 1 \quad \forall i$.

Esempio. $\sin nt$, $\cos mt$, $n, m \in \mathbf{N}$ *é sistema ortogonale in* $(C_{2\pi}, \|.\|_2)$.

Sia $E_n :=< e_1, \dots, e_N >$ (sottospazio delle combinazioni lineari degli $e_1, \dots, e_N$).
Sia $P_N(x) := \sum\limits_{j=1}^{N} < x, e_j > e_j$. P_N é lineare e $P_N(x) = x \quad \forall x \in E_N$ e quindi

$$P_N \text{ é una proiezione su } E_N \text{ con nucleo } \quad KerP_N = E_N^{\perp}$$

(perché $P_N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad < x, e_j >= 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$). Poi,
$P_N(x - P_N(x)) = P_N(x) - P_N^2(x) = 0$ e quindi $x - P_N(x) \in KerP_N = E_N^{\perp}$.
In particolare, siccome $P_N(x) \in E_N$, si ha, per Pitagora,

$$\|x\|^2 = \|[x - P_N(x)] + P_N(x)\|^2 = \|x - P_N(x)\|^2 + \|P_N(x)\|^2 \geq \|P_N(x)\|^2 \qquad \forall x \in V$$

Abbiamo cosi ottenuto la

Diseguaglianza di BESSEL Sia V spazio vettoriale munito di un prodotto scalare con corrispondente norma $\|.\|$. Sia e_j sistema ortonormale. Allora

$$\sum_j | < x, e_j > |^2 \ \leq \|x\|^2 \qquad \forall\, x \in V$$

Infatti, per ogni fissato N, per quanto sopra, e per Pitagora,

$$\|x\|^2 \ \geq \ \|P_N(x)\|^2 \ = \ \|\sum_{j=1}^{N} < x, e_j > e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} | < x, e_j > |^2 \qquad \forall N$$

SPAZI METRICI

Sia X un insieme. Una $d : X \times X :\to [0, +\infty)$ tale che

(i) $0 \leq d(u,v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)
(ii) $d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)
(iii) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

si chiama **distanza o metrica** su X e (X,d) si chiama **spazio metrico** .

Convergenza in (X,d). $\quad x_n \in X, \quad x_n \to_n x \quad \Leftrightarrow \quad d(x_n, x) \to_n 0.$

Metrica associata a una norma . Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora

$$d(u,v) := \|u - v\| \qquad \text{é una metrica su } V$$

ESEMPIO Se (X,d) é metrico e $A \subset X$, la restrizione di d ad $A \times A$ induce su A una struttura di spazio metrico (*metrica indotta).*

Palle aperte, chiuse. Sia (X,d) spazio metrico. Siano $r > 0$ e $x_0 \in X$. Scriveremo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}, \qquad (\textbf{palla aperta di raggio } r \textbf{ e centro } x_0)$$

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\} \qquad (\textbf{palla chiusa di raggio } r \textbf{ e centro } x_0)$$

Se V é spazio normato, é

$$B_r(x_0) = rB_1 + x_0 := \{rx + x_0 : x \in B_1\} = B_r + x_0 = \{x + x_0 : x \in B_r\}, \quad B_r := B_r(0)$$

FUNZIONI CONTINUE TRA SPAZI METRICI

Siano (X,d) e (Y,ρ) spazi metrici, $x_0 \in A \subset X$; una $f : A \to Y$ é continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x, x_0) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \rho(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$$

ovvero $\forall \epsilon > 0, \exists \delta := \delta_\epsilon : \quad f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$. La funzione f si dice continua in A se é continua in ogni punto di A. $\quad C(A, \mathbf{R}^n)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A a valori in $\mathbf{R}^n$ $(C(A) := C(A, \mathbf{R}))$.

La distanza é una funzione continua: $\quad d(x,y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y)$

$$\Rightarrow \quad |d(x,y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \qquad \forall x, y, x_0, y_0$$

In particolare, se $(V, \|.\|)$ spazio normato, allora $\quad x \to \|x\| = d(x, 0)$ é funzione continua (anzi, Lipschitziana): $\quad | \, \|x\| - \|x_0\| \, | \leq \|x - x_0\|$.

Nota. Naturalmente in V puó esistere un'altra norma, diciamo $\|.\|_1$, che puó non essere continua in $(V, \|.\|)$. Ad esempio, la norma $\|.\|_\infty$ su $C([0,1])$ dotato della norma integrale $\|.\|_1$ non é continua, perché, ad esempio, $\int_0^1 t^n dt \to_n 0$ ma $\sup_{t\in[0,1]} t^n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Che $\|.\|_\infty$ non sia continua segue allora dalla

Proposizione 1 Sia $f : A \to Y, \quad x \in A \subset X.$ Allora
(i) f é continua in $x \quad \Leftrightarrow \quad (x_n \in A, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x))$
(ii) Se $Y = \mathbf{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_m), \quad f$ é continua in $x \Leftrightarrow$ le f_j sono continue in x.

La dimostrazione di (i) é come nel caso $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
La (ii) segue dal fatto che $f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(x_n) \to f_j(x)$ per $j = 1, \ldots, m$.

Proposizione 2 Siano $A \subset X$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$ continue in $u \in A$. Allora
(i) $\alpha f + \beta g$ é continua in $u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) se $m = 1$, fg é continua in u e, se $g(u) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in u
(iii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to Z$ -spazio metrico- é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

ESEMPI:

(i) i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, $exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \sin(x_1 \ldots x_n)$, sono funzioni continue in $\mathbf{R}^n$.

(ii) Sia $\quad f(x,y) := \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} \quad$ se $x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$
Se $n \geq 4$, f é continua in $(0,0)$: $\quad |2xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |\frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}| \leq \frac{y^2|y|^{n-3}}{x^2+y^2} \leq |y|^{n-3}$
Se $n = 3$, f é discontinua in $(0,0)$ perché $f(x, mx) = \frac{m^3}{(1+m^2)^2} \quad \forall x \neq 0$.
Se $n = 1, 2$, da $\quad f(x, mx) = \frac{m^3}{x^{3-n}(1+m^2)^2} \quad$ segue che $\quad f$ non é limitata attorno a $(0,0)$, e quindi non é continua in $(0,0)$ perché $\qquad g$ continua in $u \quad \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|g(v)\| \leq \|g(v) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq 1 + \|g(u)\| \quad \text{se} \quad \|v - u\| \leq \delta.$$

Notiamo che, fissato y, $x \to f(x,y)$ é continua, e lo é anche $y \to f(x,y)$ per ogni fissato x, e ció quale che sia $n \in \mathbf{N}$. La 'continuitá in x ed y' é quindi una proprietá molto piú debole della 'continuitá nel complesso delle variabili'.

(iii) Sia $f(x,y) = xy \log(x^{2n} + y^{2m})$, $f(0,0) = 0$. Proviamo che f é continua (anche) in $(0,0)$. Possiamo supporre $|x| + |y| \leq 1$ e $n \geq m$. Da $|xy|^n \leq \frac{1}{2}(|x|^{2n} + |y|^{2n})$ segue $|xy \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq (|x|^{2n} + |y|^{2m})^{\frac{1}{n}} \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq \epsilon$ se $(x^{2n} + y^{2m}) \leq \delta$ per un $\delta = \delta_\epsilon$ opportuno, perché $t^{\frac{1}{n}} \log t \to 0$ al tendere di t a 0^+.

LIMITI per funzioni reali di piú variabili reali

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{B}_r(u) = B_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{B}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow f(u) \geq M)$$

Se $B'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \ u \in A, \ ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \ \exists R_M > 0 : \ u \in A, \ ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$ $(u_n \in A, \ u_n \neq u_0, \ u_n \to u_0 \ (|u_n| \to +\infty) \Rightarrow f(u_n) \to l)$

(ii) (**Cauchy**) f ha *limite finito* l per u tendente a u_0 $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u, v \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists R_\epsilon > 0 : \ u, v \in A, \ |u|, |v| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

ESEMPI . **(i)** Sia $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x,x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

(iii) Sia $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y^2}$ se $y \neq 0$. Se $x_n \to x \neq 0$ e $y_n \to 0$ allora $\frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\infty$ e quindi $\arctan \frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\frac{\pi}{2}$. Poi, siccome $f(x, \sqrt{|x|}) = (sign x)\frac{\pi}{4}$, la f non ha limite al tendere di (x,y) a $(0,0)$.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

Spazi metrici, normati

1. NORME EQUIVALENTI. Diremo che due norme $\|.\|_i, i = 1,2$ su di uno spazio vettoriale E sono tra di loro equivalenti se esistono $c \leq C$ costanti positive tali che

$$(*) \qquad c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Equivalentemente: $\|x_n\|_1 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\|_2 \to 0,$ ovvero l'identitá $Lx = x$ da $(E; \|.\|_1)$ a $(E; \|.\|_1)$ é continua insieme alla sua inversa.
Se vale la diseguaglianza di destra (di sinistra) diciamo che $\|.\|_1$ é piú forte (piú debole) di $\|.\|_2$.
Se invece nessuna delle due diseguaglianze in $(*)$ é verificata, le due norme si dicono non confrontabili.

Esercizio 1. Sia $E = l^1$. Siano $\|x\|_\infty = \sup\limits_j |x(j)|,\quad \|x\|_1 = \sum_j |x(j)| \quad \forall x \in l^1$. Provare che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in l^1$, ma non esiste alcuna $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_\infty \quad \forall x \in l^1$.

Soluzione Intanto, $\sum_j |x(j)| \geq |x(j)| \quad \forall j \in \mathbf{N}$ e quindi $\sum_j |x(j)| \geq \|x\|_\infty$. Poi, se x_n é la successione cosi definita: $x_n(j) = \frac{1}{j}$ se $j \leq n$, $x_n(j) = 0$ se $j > n$, si ha $\|x_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $|\|x_n\|_1$ é la somma parziale ennesima della serie armonica, ed é quindi divergente.

Esercizio 2. Provare che in l^2 le norme $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ non sono equivalenti.

Esercizio 3. Provare che le due norme su $C_0^\infty(\mathbf{R})$ date da $\|f\|_\infty$ e $\|f'\|_\infty$ non sono confrontabili.

Soluzione Sia f tale che $\|f\|_\infty = 1$ e sia $f_n(x) = f(nx)$. Allora $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $\|f_n'\|_\infty = n\|f'\|_\infty \to \infty$. Viceversa, se $f_n(x) = nf(\frac{x}{n})$, allora $\|f_n'\|_\infty \equiv \|f'\|_\infty$ mentre $\|f_n\|_\infty = n\|f\|_\infty \to \infty$.

2. Sia (X,d) spazio metrico, $A \subset X$. Sia $d(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a)$. Provare che $d(x,A)$ é continua e infatti Lip.
In effetti, da $d(x,a) - d(y,a) \leq d(x,y) \quad \forall x,y,a$, segue che $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(y,a) + d(x,y) \quad \forall a \in A$ e quindi, passando all'inf, $d(x,A) \leq d(y,A) + d(x,y)$. Scambiando x ed y troviamo $d(y,A) \leq d(x,A) + d(x,y)$ e quindi $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in X$.

3. Spazi l^p. Sia $p \geq 1$. $l^p := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} | \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$ é il sottospazio (lineare) di l^∞ delle **successioni di potenza p-esima sommabile**.
Una norma su l^p é

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Per vedere che $\|.\|_p$ é effettivamente una norma basta verificare la diseguaglianza triangolare. Intanto, vale la **diseguaglianza di Holder**: se $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\ |y(n)| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, x \in l^p,\ y \in l^q$$

Infatti, da $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad |xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$, segue

$$\frac{|x(n)|}{\|x\|_p} \frac{|y(n)|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x(n)|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y(n)|^q}{\|y\|_q^q} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x(n)\ |y(n)|}{\|x\|_p\ \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Siccome $q = \frac{p}{p-1}$, da Holder deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1} |x(n)|\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1} |y(n)|\right) \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|y\|_p \qquad \text{e quindi}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

cioé la diseguaglianza triangolare, qui anche detta **diseguaglianza di Minkowskii**.

4. Diseguaglianza di Holder in $C([a, b]$. Se $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora

$$\left|\int_a^b f(t) g(t) dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f, g \in C([a, b], \mathbf{R})$$

5. Lo spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue e 2π periodiche. Allora $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ é una norma su $C_{2\pi}$.

Inoltre, $\|f\|_2 := \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ é una norma su $C_{2\pi}$ e vale Cauchy-Schwartz:

$$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt| \le \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

10. Sia $E = C([a,b],\mathbf{R})$ dotato dell norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b])} |f(x)|$.
Provare che la funzione (lineare in $f \in C([a,b])$)

$$l(f) := \int\limits_a^b f(x)dx$$

é definita su E ed é continua da E ad $\mathbf{R}$.

Limiti di funzioni di piú variabili

Esercizio . Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\, |y|^\beta}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \ne 0,$$

Provare che f é prolungabile con continuitá in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Se $\alpha+\beta-2 \le 0$, $f(tx,ty) = t^{\alpha+\beta-2} f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2 \ne 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + \beta - 2 > 0$.

Se $\alpha \ge 2$ é $f(x,y) \le |x|^{\alpha-2}\,|y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$. Analogamente se $\beta \ge 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta < 2$. In tal caso, $\delta := \frac{\alpha+\beta-2}{2} \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^\delta\,|y|^\delta\,)$$

ove $\delta > 0$, $\alpha-\delta > 0$, $\beta-\delta > 0$, $\alpha+\beta-2\delta = 2$. Dalla diseguaglianza di Holder, segue che, se $0 < r,s$, $r+s = 2$ allora (prendendo $p := \frac{2}{r}$, $q := \frac{2}{s}$ nella diseguaglianza di Holder)

$$|x|^r\,|y|^s \le \frac{r}{2}\,x^2 + \frac{s}{2}\,y^2 \le x^2 + y^2 \quad \forall x,y \in \mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta} \le x^2 + y^2$ e quindi $f(x,y) \le |x|^\delta\,|y|^\delta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$.